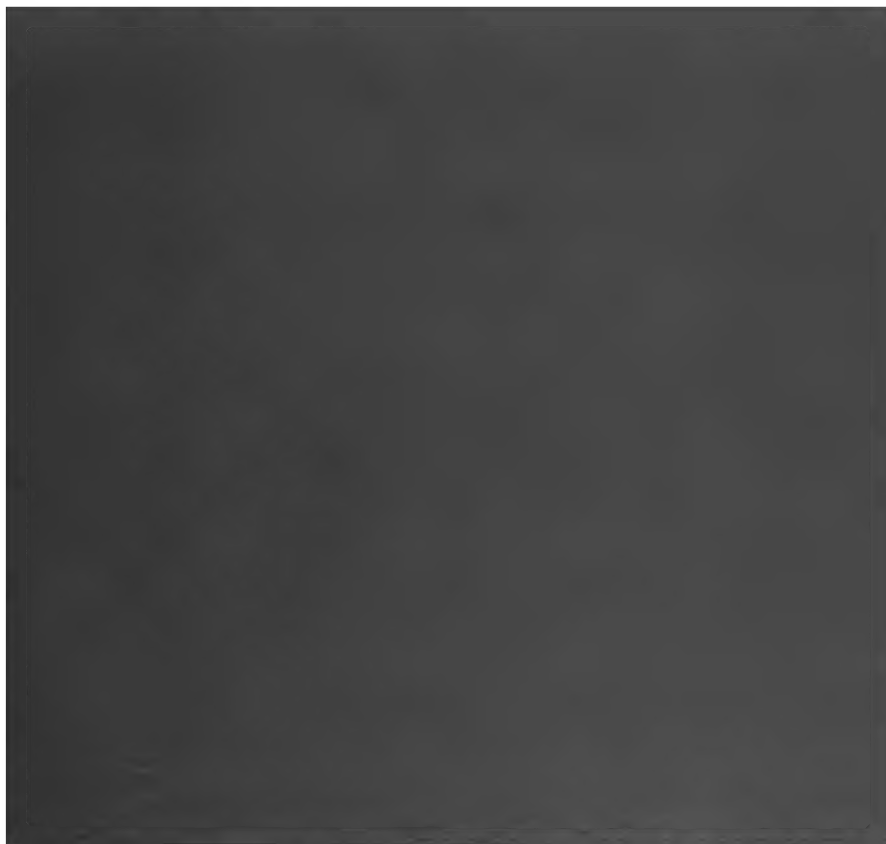

3433 06644394 0





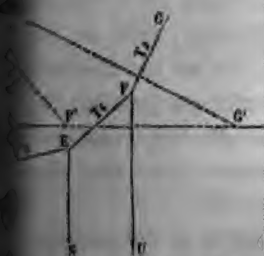


olygone se confondent,

ures P, Q, R, S.... et les
érieurs devant se faire
fassent équilibre à la ré-

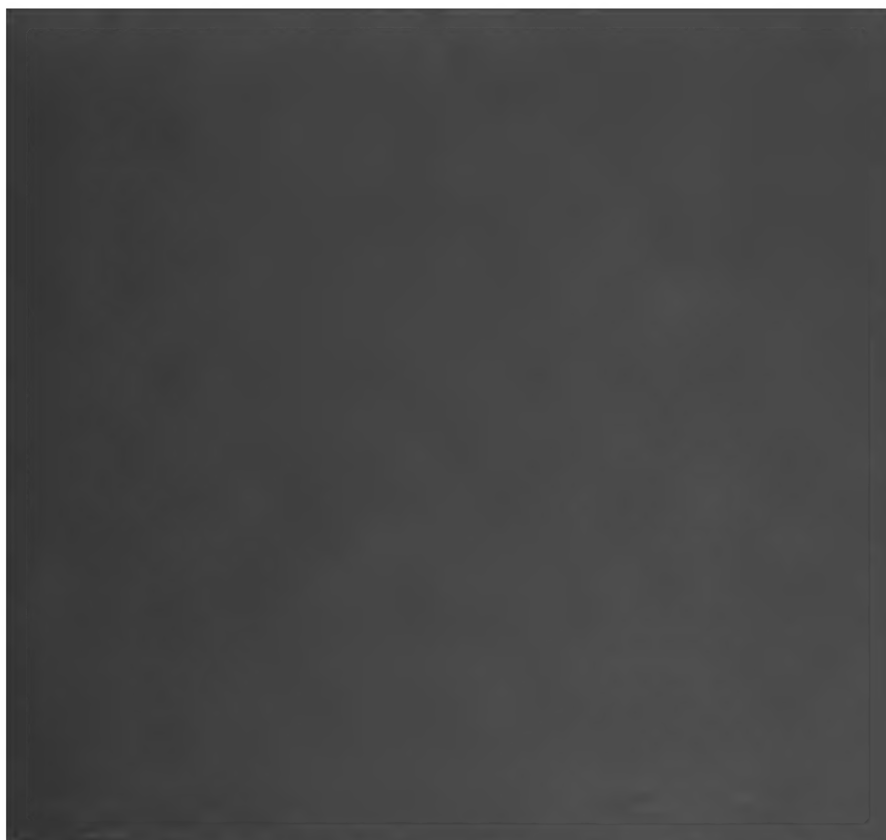
e par son propre poids,
rticulée, la résultante de
le poids du polygone et
t les directions des deux
quilibre, se couper en un
de la verticale du centre

par construction graphique.
par le côté AB prolongé,
une longueur égale à la
parallélogramme B*abd*, le
chelle, la tension T_1 du côté
re P. De plus, si l'on mène
horizontale indéfinie sur
BC', C'D', D'E', E'F', F'G'
, R, S, U, et qu'au même
e à AB et de longueur pro-



B*b*, il est clair que le trian-
et BC' respectivement per-
B*d* du triangle B*bd* et deux





NOTIONS FONDAMENTALES

DE MÉCANIQUE

ET DONNÉES D'EXPÉRIENCE

TYPOGRAPHIE DE CH. LAHURE
Imprimeur du Sénat et de la Cour de Cassation
rue de Vaugirard, 9.

LEÇONS DE MÉCANIQUE PRATIQUE

NOTIONS FONDAMENTALES
DE MÉCANIQUE
ET DONNÉES D'EXPÉRIENCE

PAR

ARTHUR MORIN

Général d'artillerie, membre de l'Institut
ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mécanique industrielle
au Conservatoire des arts et métiers, membre correspondant de l'Académie royale
des sciences de Berlin, de l'Académie royale des sciences de Madrid
de l'Académie de Metz et de la Société industrielle de Mulhouse
associé correspondant de l'Académie des sciences de Turin
membre de la Société littéraire et philosophique
de Manchester

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14
(Près de l'École de Médecine)

1855

NOTIONS FONDAMENTALES

DE MÉCANIQUE

ET DONNÉES D'EXPÉRIENCE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. *De l'étendue.* — L'étendue a trois dimensions : longueur, largeur, hauteur. Pour la mesurer on la distingue en *ligne* ou *dimension linéaire*, qui est une longueur sans largeur ; en surface, ayant *longueur* et *largeur*, et en *solide* ou *volume*, qui réunit les trois dimensions de l'étendue. (LÉGENDRE, *définitions*.) La mesure de l'étendue constitue la science de la géométrie. Nous n'avons donc à nous en occuper qu'au point de vue de son emploi dans les applications à la mécanique.

Les *longueurs* se mesurent par leur comparaison avec une unité de convention adoptée dans chaque pays, et qui en France est le *mètre,* subdivisé en décimètres, centimètres et millimètres. Pour apprécier des fractions plus petites que le millinètre on se sert du *vernier*, et de divers appareils de précision, tels que les vis micrométriques, les compensateurs, etc., dont la description est du ressort de la géométrie industrielle.

Les *surfaces* se mesurent par les règles de la géométrie et s'expriment en mètres carrés. Mais il arrive souvent qu'

sont terminées par des lignes et des contours qui ne sont soumis à aucune loi géométrique connue, et alors il est nécessaire de recourir à des modes de quadrature approximatifs ou à des moyens mécaniques. L'emploi de ces méthodes se reproduisant sans cesse dans les relèvements et dans la discussion des résultats d'expériences, nous en parlerons avec quelques détails pour n'avoir plus besoin d'y revenir.

L'une des méthodes les plus simples et les plus exactes de déterminer approximativement par le calcul la surface limitée par un contour quelconque curviligne ou composé de parties courbes et de droites est la suivante. Menez à travers la surface une ligne AB, et partagez la distance de ses deux points d'intersections avec le contour en un nombre *pair* de parties égales, numérotées 1, 2, 3, 4...., 7, 8, 9, par exemple. Aux points de divisions élevez des perpendiculaires à la ligne AB, appelée *axe des abscisses*. Vous aurez les longueurs des ordonnées 1'1", 2'2", 3'3"...., 8'8", 9'9". Cela fait, la surface S terminée par la ligne courbe aura pour valeur approchée

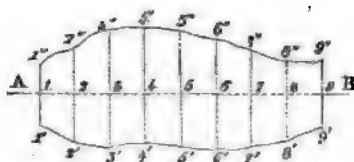


Fig. 1.

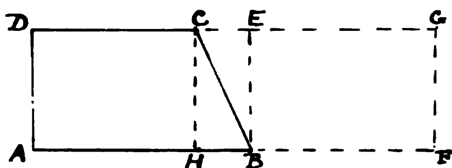
$$S=\frac{1}{3}\,1.2[1'.1''+9'.9''+4(2'.2''+4'.4''+\dots 8'.8'')+2(3'.3''+5'.5''+\dots 7'.7'')],$$

c'est-à-dire *le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, équidistantes, multiplié par la somme des ordonnées extrêmes, plus quatre fois la somme des ordonnées de rang pair, plus deux fois la somme des ordonnées de rang impair.*

M. Poncelet a donné la démonstration suivante de cette règle, page 187 de l'*introduction à la mécanique industrielle*, 2e édition.

2. *Démonstration de la formule de Simpson.* — L'aire à mesurer étant limitée par le contour *aa'b'c'd'...g'g...ba*, si l'on partage la ligne *ag* en six parties égales, on aura d'abord une première approximation en prenant la somme des

To find the area of a Trapezoid.



The trapezoid ABCD having the sides AB. and DC parallel is equal to half the parallelogram AFGD having the same altitude AD and whose base AF equals the sum of the two parallel sides AB. DC.

Draw CH and BE parallel to AD or FG then the triangle CBE will be identical with the triangle CBH (Euclid I. prop. XXXVIII) and because BF = CD by construction the parallelogram BFGE is identical with the parallelogram AHCD therefore the Trapezoid CGF is identical with the trapezoid ABCD but the two trapezoids ABCD + CGFB are equal to the parallelogram ADGF therefore the trapezoid ABCD = $\frac{1}{2}$ parallelogram AFGD

$$= \tfrac{1}{2}\, AD \times AF$$

$$= \tfrac{1}{2}\, AD \times (AB + BF)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, AD \times (AB + DC)$$

but AD = CH.

therefore area of

trapezoid ABCD $= \frac{1}{2} CH(AB + DC)$

Or in words.

Multiply the sum of the two parallel sides by the perpendicular height between them and half the product will give the area of the trapezoid. — .

aires des trapèzes rectilignes $aa'b'b$, $bb'b'b$, etc., ce qui donnera

$$\frac{1}{2}ab(aa'+bb')+\frac{1}{2}bc(bb'+cc')+\frac{1}{2}cd(cc'+dd')+\text{ etc.},$$

ce qui revient à

$$\frac{1}{2}ab(aa'+2bb'+2cc'+2dd'+2ee'+2ff'+gg').$$

Cette méthode est la plus ordinairement suivie. Mais il est clair que, pour des courbes dont la concavité est toujours

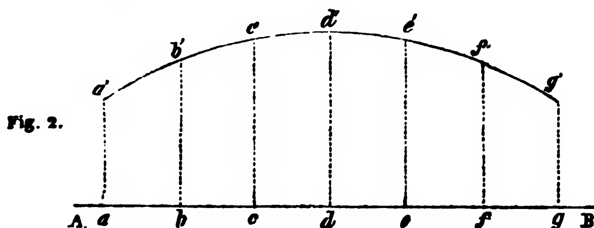


Fig. 2.

tournée vers la ligne ag des abscisses, cette formule donnera un résultat trop faible; qu'au contraire elle le donnera trop grand pour des courbes convexes vers la ligne ag. Il n'y aura compensation approximative que pour les courbes alternativement concaves et convexes.

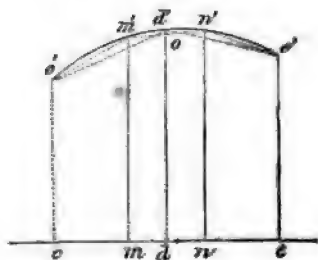


Fig. 3.

Mais si l'on considère l'intervalle compris entre deux ordonnées impaires consécutives cc' et ee' et qu'on partage ce en trois parties égales, $cm=mn=ne$, on aura d'abord une valeur plus approchée de l'aire mixtiligne $cc'd'e'e$, en substituant les trois trapèzes rectilignes $cc'm'm$, $mm'n'n$, $nn'e'e$, aux deux trapèzes $cc'd'd$ et $dd'e'e$. La somme des aires de ces trois trapèzes est

$$\frac{1}{2}cm(cc'+2mm'+2nn'+ee')=\frac{1}{3}ab(cc'+2mm'+2nn'+ee'),$$

attendu que

$$cm = mn = ne = \frac{2}{3} ab.$$

En menant la ligne $m'n'$ qui rencontre dd' en o, on a

$$do = \frac{1}{2}(mm' + nn');$$

d'où $$2(mm' + nn') = 4.do.$$

L'aire totale de ces trois trapèzes a donc pour valeur

$$\frac{1}{3} ab(cc' + 4.do + ee').$$

Or, dans le cas où la courbe est concave vers l'axe des abscisses, cette aire est plus petite que l'aire curviligne à mesurer, et si l'on substitue à do l'ordonnée dd' un peu plus grande, et qui est donnée, on établira une compensation approximative. L'inverse ayant lieu dans le cas où la courbe est convexe vers l'axe des abscisses, on aurait une compensation analogue. Donc on obtiendra une valeur plus approchée de l'aire curviligne $cc'd'e'e$ par l'expression

$$\frac{1}{3} ab(cc' + 4dd' + ee').$$

On aurait de même pour l'aire $aa'c'c$

$$\frac{1}{3} ab(aa' + 4bb' + cc').$$

Donc, en faisant la somme de toutes ces aires partielles, on aura pour la valeur approchée de la surface totale

$$\frac{1}{3} ab[aa' + 4(bb' + dd' + ff') + 2(cc' + ee') + gg'],$$

Ce qui est la formule de Simpson *.

---

* M. Sonnet a donné une démonstration élégante du théorème de Th. Simpson, et fondée sur les propriétés de la parabole, dans ses *Notions de mécanique*, n° 83.

Since $cm = mn = ne$ .. $cm = \frac{1}{3} ce$.
but $ce = 2ab$. therefore $cm = \frac{2}{3} ab$.

The sum of the partial areas
equals . $\frac{1}{3}ab(cc' + 4dd' + ee') + \frac{1}{3}ab(aa' + 4b$
$+ \frac{1}{3}ab(ee' + 4ff$

$= \frac{1}{3}ab\left[aa' + 4(bb' + dd' + ff') + 2(cc' + e\right.$

Il peut arriver que dans quelques cas certaines ordonnées soient nulles, ce qui n'empêche pas la formule d'être employée.

On devra choisir la ligne AB des abscisses de façon que les ordonnées ne coupent pas la courbe sous des angles trop petits, ce qui laisserait de l'incertitude sur le point d'intersection.

Il conviendra de multiplier d'autant plus les divisions que la courbure sera plus prononcée et plus accidentée, et qu'on voudra obtenir plus d'approximation.

Quand la surface à carrer est limitée d'avance à une ligne d'abscisses AB et à deux ordonnées extrêmes, on opère de même.

Cette méthode connue sous le nom du géomètre Simpson, auquel elle est due, est plus exacte et plus approximative que celle qui consiste à prendre la somme des aires des trapèzes inscrits.

Nous en donnerons de nombreuses applications.

Les *cubatures des solides*, *des déblais et remblais irréguliers*, *le déplacement des bâtiments*, en offrent aussi souvent l'emploi.

Lorsqu'il s'agit de solides terminés par des surfaces courbes irrégulières et dont la loi n'est pas connue, on procède d'une manière analogue. Nous prendrons pour exemple *le déplacement des bâtiments*. On fait, ou l'on a ordinairement d'avance, le tracé des profils transversaux ou *gabarits* du bâtiment à des distances égales, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, et limité supérieurement à la ligne de flottaison. On commence par faire la quadrature partielle de chacun de ces profils, que l'on prend en nombre impair, comprenant par conséquent un nombre pair d'intervalles égaux. On porte sur une ligne d'abscisses ces intervalles égaux. En chaque point de division on élève une perpendiculaire ou ordonnée, qu'à une échelle convenue on prend pour représenter la surface du profil correspondant. Par les extrémités de toutes ces ordonnées on fait passer une courbe, et l'aire

comprise entre la courbe et les ordonnées extérieures de la ligne des abscisses, calculée par la formule de Simpson, donne le volume du déplacement du navire.

On résout, comme nous le verrons plus tard, par la méthode des quadratures beaucoup d'autres questions pour lesquelles le calcul offrirait quelquefois des difficultés insurmontables.

5. *Divisibilité des quantités en éléments infiniment petits.* — Avant d'aller plus loin il est utile de remarquer dès à présent que, toutes les quantités étant susceptibles d'accroissement ou de diminution, elles peuvent être considérées comme composées de parties, d'éléments dont le nombre est d'autant plus grand que les parties sont moindres; et, comme au-dessous de toute partie finie on peut en concevoir une plus petite, on voit qu'en définitive les quantités ou les corps peuvent être regardés comme composés d'éléments infiniment petits, ou plus petits que toute quantité donnée, dont la réunion, la somme, produit une quantité finie.

Si l'on se reporte à l'accroissement progressif des objets que nous offre la nature, on concevra plus facilement cet accroissement ou cette diminution graduelle des quantités, par l'addition ou la soustraction continue de quantités infiniment petites.

Les végétaux dans leur croissance si variée et parfois si rapide ne poussent cependant que par degrés insensibles, par développements infiniment petits, qui, ajoutés les uns aux autres pendant un mois, une année, forment la pousse de cette période.

Un enfant grandit rapidement vers 10 à 12 ans quand il croît de $0^m,10$ par an ou en

$$3600'' \times 24^h \times 365^j = 31\,536\,000'',$$

ou de

$$\frac{0^m,10}{31\,536\,000} = 0^m,000\,000\,003,$$

ou 3 millionièmes de millimètre en 1''; et comme on peut

fractionner la seconde en quelque sorte indéfiniment, on voit que l'accroissement peut l'être de même.

C'est encore ainsi que le passage des piétons, qui en quelques années usent les dalles en lave d'un trottoir, la chute d'une cascade qui depuis des siècles ronge le rocher de granit sur lequel elle tombe, le passage de la vapeur à travers le tiroir distributeur qu'elle use en 20 ou 30 ans, enlèvent et détruisent à chaque instant des quantités infiniment petites qui, ajoutées les unes aux autres, produisent une destruction finie.

4. *Observations sur ces exemples.* — Ces exemples n'ont pour but que de faire sentir que toutes les quantités croissent et diminuent graduellement par éléments infiniment petits qui, ajoutés les uns aux autres pendant des temps finis, forment des quantités finies.

Ces notions nous seront nécessaires pour l'étude des effets mécaniques, qui ne s'accomplissent jamais brusquement et dans des temps nuls, mais par degrés quelquefois lents et parfois si rapides, que nos sens et nos moyens d'observation ne peuvent en saisir la durée, sans que pour cela cette durée puisse jamais être supposée nulle. Elles nous permettent de regarder les corps comme un assemblage de points matériels aussi petits que l'on voudra, mais ayant toutes les propriétés de la matière telles que la pondérabilité, l'impénétrabilité, etc., etc.

DES FORCES ET DE LA MESURE DE LEUR TRAVAIL.

5. *Inertie de la matière.* — « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque cause étrangère n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état. » (NEWTON, 1re *loi du mouvement.*) De cette loi fondamentale il résulte, comme nous l'avons déjà vu, que, dans le mouvement varié, si la cause qui produit la variation cesse son action, le mouvement devient uniforme; et que, dans le mouvement curviligne, si la cause qui oblige le corps à changer à chaque instant de direction cesse d'agir, le mouvement se continue dans la direction du dernier élément curviligne décrit, et par conséquent suivant la tangente.

6. *Définition des forces.* — Ces causes étrangères qui produisent, modifient, ou tendent à produire ou à modifier le mouvement, sont ce qu'on nomme *des forces.* Telles sont : l'attraction, la pesanteur, l'action des animaux, de l'eau, de l'air, de la vapeur, la résistance de l'air, le frottement, etc.

Puisque une action extérieure est toujours nécessaire pour changer l'état de mouvement d'un corps, cela tient donc à ce que le corps oppose une certaine résistance provenant de son inertie. Voici comment Newton l'a définie : « La force qui réside dans la matière (*vis insita*) est le pouvoir qu'elle a de résister. Le corps exerce cette force toutes les fois qu'il s'agit de changer son état actuel de mouvement, et on peut alors la considérer sous deux différents aspects : ou comme *résistante*, en tant que le corps s'oppose à la force qui tend à lui faire changer d'état; ou comme *impulsive*, en tant que

le même corps fait effort pour changer l'état de l'obstacle qui lui résiste. Ainsi on peut donner à la force qui réside dans les corps le nom très-expressif de *force d'inertie.* » (NEWTON, *Principes*, etc., vol. I, p. 2.)

On peut rendre évident par des exemples que l'*inertie* est une force dont l'action se manifeste dans tous les changements de mouvement. Ainsi supposez un corps AB posé sur un corps AD, et déterminez par expérience le poids P qu'il faut suspendre à l'extrémité d'un fil CE attaché en un point C et passant sur une poulie de renvoi pour renverser ce corps AB; il est clair que toute cause qui produira le renversement du corps, supposé symétrique, soit en avant, soit en arrière, équivaudra au poids P, et sera une force.

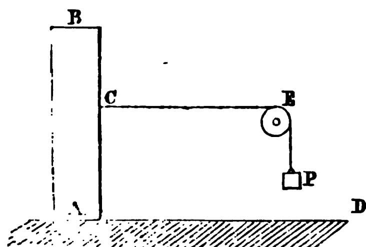


Fig. 4.

Or, si l'on fait marcher le plan AD d'un mouvement accéléré, on observera que, si l'accélération se fait avec une certaine rapidité, le corps AB se renversera en sens contraire du mouvement. Son inertie aura donc agi, dans ce cas, comme une résistance à l'accélération avec une intensité égale ou supérieure au poids P. — Si au contraire le mouvement, parvenu à une vitesse notable, uniforme ou accélérée, est retardé brusquement, le corps se renverse dans le sens du mouvement. L'inertie du corps a donc alors agi comme une puissance qui s'opposait au changement du mouvement avec une intensité égale ou supérieure au poids P. L'inertie ayant dans l'un et l'autre cas produit le même effet que la force, le poids P, on est donc autorisé à la regarder aussi comme une force.

Dans la communication rapide du mouvement que des chevaux ardents tendent à imprimer à une voiture, c'est l'*inertie* de la voiture qui, par sa résistance, fait casser les traits, les palonniers, etc. C'est la même cause qui fait ver-

ser une voiture lorsque, animée d'un mouvement rapide, elle éprouve en tournant un ralentissement brusque. C'est elle qui projette dans l'espace les voyageurs placés sur l'impériale d'un convoi de wagons arrêté dans sa marche; qui fait rompre les cordages à l'aide desquels on veut retenir quelquefois trop rapidement des bateaux emportés par un courant, les ancres ou les câbles en fer des bâtiments auxquels les flots et les vents ont communiqué une grande vitesse, les boulets qui pénètrent dans les maçonneries, dans les terres, dans les sables, bien moins durs que la fonte, les dents des engrenages, quand on embraie brusquement des machines pesantes, comme des canons à forer, des meules de moulins à poudre, etc., etc.

On ne saurait trop engager les élèves à rechercher par eux-mêmes des exemples de ces effets de l'inertie comme force motrice ou résistante, pour se bien pénétrer de son existence et de son influence dans les mouvements variés.

7. *Mode d'action des forces.* — Les forces agissent toujours graduellement d'une manière qui peut être constante ou variable, mais toujours continue ou progressive, pendant des temps d'une certaine durée. Cette action se manifeste tantôt par des degrés insensibles et avec lenteur, tantôt avec rapidité, mais jamais dans des temps nuls. Si les phénomènes s'accomplissent parfois dans des intervalles de temps inappréciables à nos sens et à nos moyens d'observation, cela tient uniquement à l'imperfection de ceux-ci; et, ce qui le prouve, c'est que plus on rend ces moyens sensibles, et mieux on peut apprécier la durée de phénomènes qu'on regardait auparavant comme instantanés.

Tous les corps étant plus ou moins compressibles, flexibles, mous ou élastiques, ils se déforment dans leur réaction réciproque en exerçant les uns contre les autres des efforts qui varient d'un instant à l'autre, et ces déformations, ces flexions plus ou moins grandes ne peuvent s'accomplir que dans des temps d'une certaine durée. Dans

les phénomènes si rapides de transmission du mouvement par le choc, les efforts développés et les vitesses transmises ou perdues ne le sont que graduellement et avec continuité. Il est facile de montrer des exemples de ce que nous venons de dire dans le choc des projectiles, le jeu de paume, le jeu de ballon, etc.

C'est donc faire abstraction d'une manière trop grave des effets naturels et partir d'une hypothèse trop contraire aux faits que de supposer, comme on se le permet quelquefois, que des chocs, des transmissions de mouvement aient lieu instantanément. Il en résulte toujours des notions et parfois des conséquences tout à fait fausses, et il importe au contraire de ne pas perdre de vue que toutes les forces qui agissent dans la nature sont analogues et comparables à des tensions, à des pressions, qui agissent graduellement et avec continuité.

8. *Mesure des forces.* — Pour parvenir à la mesure des forces nous admettrons comme un axiome que *deux forces sont égales quand, substituées l'une à l'autre, elles produisent le même effet dans les mêmes circonstances ou en détruisent une troisième qui leur est directement opposée.*

Cela posé, si nous prenons un ressort, un peson, un dynamomètre, dont les flexions sous l'action de poids connus aient été mesurées et observées sur une étendue suffisante, et si nous soumettons ensuite ce peson à l'action d'une force quelconque, lorsque cette force aura produit dans le ressort une flexion égale à celle qui était due à un certain poids, il est clair que, si dans les deux cas le ressort a conservé son élasticité, la force et le poids ayant produit le même effet, surmonté la même résistance à la flexion, ces deux forces seront égales. Le poids pourra donc servir de mesure à la force.

Ce que l'on vient de dire pour le cas très-simple où il s'agissait seulement de mesurer la force, l'effort développé par des moteurs animés ou inanimés exerçant des

efforts de traction, tels que des chevaux, des locomotives, des remorqueurs, peut aussi se réaliser dans la pratique par des moyens simples, que nous ferons connaître plus tard.

Nous admettrons donc à l'avenir que *toutes les forces qui agissent dans les machines sont comparables à des poids.*

9. *Unité de mesure des forces.* — Les forces étant comparables à des poids, nous adopterons l'unité de poids pour unité de mesure des forces, et nous les exprimerons en kilogrammes, ce qui signifiera simplement pour nous qu'elles produisent dans les mêmes circonstances le même effet que le nombre correspondant de kilogrammes agissant de la même manière.

10. *Dénominations diverses des forces.* — On distingue quelquefois les forces par différents noms selon les circonstances dans lesquelles elles agissent. Ainsi on nomme forces *motrices* ou *mouvantes* celles qui produisent le mouvement ou l'entretiennent, *forces résistantes* celles qui tendent à l'empêcher ou à le retarder, *forces accélératrices* ou *retardatrices* celles qui l'accélèrent ou le retardent, forces *attractives* ou *répulsives* celles qui sont relatives aux attractions ou répulsions. Enfin on emploie les mots de *puissances* et *résistances* pour distinguer les forces qui favorisent le mouvement et celles qui s'y opposent.

11. *Constitution des corps.* — Nous avons déjà dit que tous les corps de la nature devaient être considérés comme composés d'éléments, de molécules infiniment petites. Ces molécules sont rapprochées les unes des autres par des forces attractives et tenues en même temps à de certaines distances par d'autres forces appelées répulsives. Ce sont ces forces, qu'on nomme *forces moléculaires*, qui maintiennent le corps, ou les parties qui le composent, dans sa forme tant que quelque cause ne vient pas l'altérer.

Lorsque les forces répulsives et attractives ont une grande intensité, les corps résistent avec énergie à toute cause, à toute force qui tend à les déformer, à les comprimer ou à les étendre, et l'on dit qu'ils sont *solides*. Mais cette dénomination est relative plutôt qu'absolue et les corps qu'on nomme *liquides* ou *gazeux* sont constitués comme ceux dont nous venons de parler et qu'on appel solides. Toute la différence consiste, comme nous l'avons indiqué, en ce que dans les corps solides les forces moléculaires attractives sont prépondérantes, qu'elles maintiennent les molécules à un plus grand état de rapprochement et qu'elles s'opposent avec plus d'énergie à leur écartement, à leur séparation, que dans les liquides où la facilité avec laquelle les molécules se séparent, se meuvent et se disjoignent sous l'action du plus faible effort, semble indiquer qu'il y a presque égalité entre les forces attractives et répulsives. Enfin, dans le gaz les forces répulsives l'emportent sur les forces attractives et ces corps tendent d'eux-mêmes à occuper des volumes de plus en plus grands à mesure que les obstacles, les enveloppes qui s'y opposent, deviennent plus faibles.

Il suit de ces considérations qu'à proprement parler il n'y a pas de limite tranchée entre les solides, les liquides et les gaz, qu'ils sont constitués d'une manière analogue, qu'ils jouissent de propriétés communes, qu'il ne faut jamais perdre de vue que les molécules, les points matériels qui les composent sont susceptibles de se rapprocher ou de s'éloigner sous l'action de forces extérieures. Ces notions conformes à la nature même des corps excluent l'idée absolue de corps *durs* ou *inflexibles* et celle de corps *mous* dénués de toute faculté de retour partiel ou complet vers leur forme primitive ou de toute élasticité.

12. *Principe de l'action égale et contraire à la réaction.* — On concevra facilement, d'après ce qui précède, que quand deux corps se pressent, se tirent ou se choquent, il se dé-

veloppe aux points de contact, de la part de l'un, des efforts de compression ou d'extension, et de celle de l'autre des efforts de répulsion, de résistance, opposés et égaux. Les molécules comprimées, les ressorts moléculaires fléchis ou tendus, réagissent avec une force précisément égale et contraire à celle qui les comprime, les fléchit ou les tend. Il en est de même dans les actions attractives ou répulsives qui s'exercent à distance, de sorte que les corps ou les molécules qui les composent s'attirent ou se repoussent avec des énergies précisément égales et contraires. Ces effets réciproques constituent l'un des principes fondamentaux ou axiomes de la mécanique, que l'on énonce en disant avec Newton, qui l'a exprimé le premier, que l'*action est toujours égale et contraire à la réaction*, c'est-à-dire que *les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dans des directions contraires.* (3e Loi.)

13. *Observation sur cette loi.* — (Cas de deux hommes tirant aux extrémités d'une même corde. — Pénétration des projectiles, réaction du milieu pénétré.)

14. *Point d'application des forces.* — L'action d'une force sur un corps ne se transmet que de proche en proche du point où elle est immédiatement appliquée à l'intérieur, par une succession de flexions des ressorts moléculaires; il faut, comme on l'a dit au no 7, un certain temps pour que cette transmission s'opère. Lorsque la force devient constante, il se produit un état d'équilibre entre elle et les ressorts qu'elle fléchit, et, à partir de cet instant, si l'équilibre subsiste, on peut regarder les corps comme *rigides* et *inextensibles*. Or, dans les machines, on emploie toujours des corps assez peu flexibles et proportionnés de telle sorte que les efforts auxquels ils sont soumis les fléchissent d'une quantité assez petite pour qu'on puisse négliger les effets des flexions, qui ne se produisent en général d'une manière sensible qu'au commencement de l'action ou du mouvement; et dans tous les cas semblables on peut regarder les

corps comme rigides et *les efforts comme transmis dans leur direction propre en un point quelconque de cette direction* invariablement lié au véritable point d'application.

Mais quand il y a des chocs, des efforts variables, donnant lieu à des compressions fréquemment répétées, nous verrons qu'il en résulte des pertes d'effet dont il faut tenir compte. Cette réserve s'applique évidemment aussi aux corps mous qui se déforment sous l'action des forces extérieures.

15. *Effet et travail des forces.* — Il résulte de ce qui précède qu'à partir du moment où une force commence à agir, elle produit dans le sens de son action des flexions et des compressions; et que son point immédiat d'application cède, marche, se déplace, dans le sens de cette action jusqu'à ce que, la résistance des ressorts moléculaires étant égale à l'action qui tend à les fléchir, ce déplacement relatif cesse. Alors, si le corps est retenu par des obstacles ou par des résistances supérieures, l'action de la force est annulée; son effet est nul, en ce sens qu'il n'y a pas de mouvement produit. Tel est le cas d'un support, d'une colonne, d'un homme supportant en place un fardeau, d'une cariatide, des chevaux qui ne peuvent faire marcher une voiture embourbée, d'un laminoir trop serré qui ne peut vaincre la résistance du fer, etc.

Pour que les forces produisent un effet mécanique, industriel, un travail utile, il faut donc qu'elles fassent parcourir à leur point d'application un certain chemin dans leur direction propre. Ainsi la condition fondamentale du travail mécanique ou industriel des forces, c'est qu'il y ait à la fois effort exercé, et chemin parcouru en vertu de cet effort.

16. *Mesure du travail d'une force constante, quand le chemin parcouru par son point d'application l'est dans sa direction propre.* — Il est alors évident que l'effet, le travail produit par la force, est proportionnel : 1° à l'intensité de son effort,

2° au chemin parcouru, et par conséquent au produit de ces deux facteurs. Ainsi, dans l'élévation des fardeaux, l'extraction des minerais; le tirage des voitures, des charrues; le halage des bateaux, et l'épuisement des eaux, il est évident que pour un même poids, un même effort, l'effet est double si le chemin parcouru est double; et que pour un même chemin l'effet est double, triple, si la résistance est double ou triple.

Les efforts étant comparables et comparés à des poids dont l'action produirait le même effet, et les chemins parcourus étant exprimés en mètres, on voit que le travail d'une force constante sera représenté par le produit de son intensité exprimée en unité de poids ou en kilogrammes par le chemin parcouru dans sa direction propre exprimée en unités de longueur ou en mètres. Or, si l'on prend pour unité de travail celui qui correspond à un kilogramme élevé à 1 mètre, le travail d'une force F, qui aura fait parcourir à son point d'application un chemin E, sera exprimé par F.E kilogrammes élevés à 1 mètre, ce que l'on désigne par l'indice *k m* écrit à droite et un peu au-dessus du produit F.E. Ainsi qu'il suit FE^{km}.

17. *Représentation de ce travail par la surface d'un rectangle.* — Si l'on prend le chemin parcouru E pour la base d'un rectangle dont la hauteur serait à une certaine échelle l'effort F, il est évident que le produit F.E sera la mesure de la surface de ce rectangle, ou que réciproquement cette surface pourra être prise pour représenter le travail F.E.

18. *Mesure du travail d'une force variable.* — Lorsque la force varie, on peut encore appliquer le même mode de mesure à chacun des espaces élémentaires infiniment petits parcourus *e* et pendant lesquels il est permis de considérer la force comme constante. Le travail correspondant à chacun de ces espaces élémentaires est donc représenté encore par le produit F.*e*.

Si l'on porte sur une ligne droite AB prise pour axe des

F Kilogrammes raised E metres high is the s[...]
as FE Kilogrammes raised one metre hig[...]

abscisses les chemins parcourus, et qu'en chaque point de division on élève une perpendiculaire représentant à une certaine échelle l'effort exercé, on aura ainsi une surface courbe limitée par la ligne des abscisses, par les ordonnées extrêmes et par la courbe qui passe par les extrémités de toutes les ordonnées. Si l'on considère le petit trapèze élémentaire correspondant à un effort quelconque F et à un élément de chemin e, il est clair que la surface de ce petit trapèze sera $F.e$, et qu'elle représentera le travail élémentaire correspondant au petit chemin e.

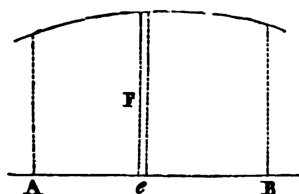


Fig. 5.

Le travail total pour un chemin E se composant de la somme de toutes les quantités de travail élémentaires Fe, il est évident qu'il sera représenté par la surface totale limitée par la courbe. Il ne s'agira donc que de trouver cette surface ou la somme de tous les produits élémentaires $F.e$. Le calcul donne dans certains cas le moyen de l'obtenir directement; mais dans beaucoup d'autres, et pour la pratique, il est plus commode d'employer les méthodes de quadrature, et en particulier celle de Simpson, que l'on a exposée dans la Ire leçon.

Il est d'ailleurs tout à fait indispensable de recourir à ces méthodes quand on veut estimer le travail transmis par les moteurs animés, et par beaucoup de machines, dans lesquelles l'effort transmis varie sans cesse, suivant des lois impossibles à trouver.

19. *Application au travail développé par les chevaux dans le halage d'un bateau poste sur le canal de l'Ourcq.* — A l'aide d'instruments, que nous décrirons prochainement, on a obtenu une courbe expérimentale ou relation graphique entre les espaces parcourus et les efforts exercés. Il serait impossible par aucune méthode de calcul direct d'obtenir

la relation qui lie les efforts aux chemins parcourus pour en déduire le travail, mais la quadrature nous en fournira les moyens. Opérant, par exemple, sur un espace de 48 mè-

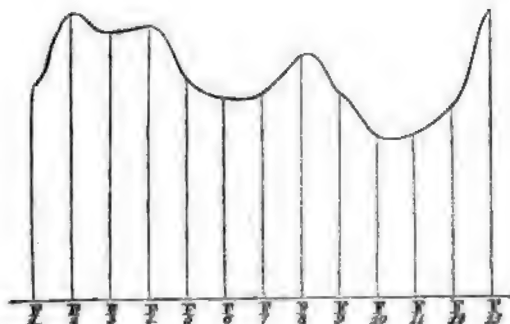


Fig. 6.

tres de longueur, que l'on partage en 12 parties égales, on trouve pour les ordonnées $F_1, F_2 \ldots, F_{12}, F_{13}$, les valeurs suivantes, d'après l'échelle des flexions du ressort.

$F_1 = 87$ kil.	$F_2 = 124,7$ kil.	$F_3 = 117,0$ $\quad \frac{E}{12} = \frac{48}{12} = 4^m$
$F_{13} = 128,5$	$F_4 = 121,0$	$F_5 = 98,3$
$215,5$	$F_6 = 90,7$	$F_7 = 94,5$
	$F_8 = 109,5$	$F_9 = 94,5$
	$F_{10} = 71,8$	$F_{11} = 71,8$
	$F_{12} = 85,0$	$476,1 \times 2 = 952,2$
	$602,7 \times 4 = 2410,8.$	

Le travail total pour cet espace est donc :

$$\frac{1}{3} \times 4[215,5 + 2410,8 + 952,2] = 4771^{km},33.$$

Cette expérience est relative à un cas où le bateau pesait avec son chargement 7147 kil., et marchait à la vitesse de $4^m,71$ en $1''$, ou $16^{kilom},956$ à l'heure.

20. *Machine à vapeur à Indret.* — Le diamètre du piston étant de $0^m,36$,

$$\text{sa surface} = \frac{\overline{36}^2}{1,273} = 1020 \text{ centimètres carrés.}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{36^2}{1.273}$$

La course totale est de $0^m,92$. En la partageant en 16 parties égales on a

$$\frac{1}{3}\frac{E}{16}=0^m,01\,917.$$

Le relèvement de la courbe des pressions fournie par l'in-

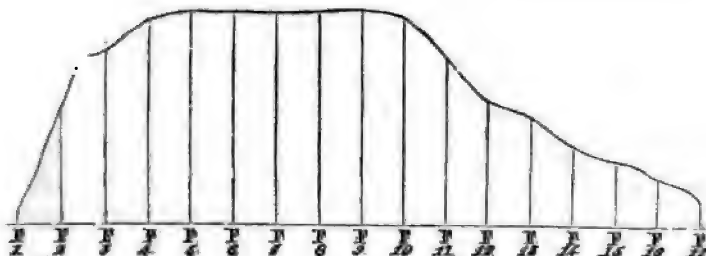


Fig. 7.

dicateur donne les résultats suivants pour les pressions sur chaque centimètre carré de la surface du piston.

kil.			kil.
$F_1 = 0,193$	$F_2 = 1,102$	$F_3 = 1,585$	$F_1 + F_{17} = 0,400$
$F_{17} = 0,207$	$F_4 = 1,930$	$F_5 = 1,965$	$4(F_2 \ldots + F_{16}) = 45,048$
$0,400$	$F_6 = 1,985$	$F_7 = 1,985$	$2(F_3 \ldots + F_{15}) = 21,820$
	$F_8 = 1,985$	$F_9 = 1,985$	$67,268$
	$F_{10} = 1,930$	$F_{11} = 1,723$	
	$F_{12} = 1,138$	$F_{13} = 1,033$	
	$F_{14} = 0,724$	$F_{15} = 0,634$	
	$F_{16} = 0,468$	$10,910 \times 2 = 21,820$	
	$11,262 \times 4 = 45,048$		

Et pour le travail développé par la vapeur dans une course

$$0^m,01\,917 \times 1020^{c.q} \times 67^k,268 = 1315^{km},318.$$

21. *Effort moyen d'une force variable.* — Il est souvent utile ou même nécessaire de connaître l'effort moyen d'une force variable, c'est-à-dire l'effort constant qui produirait le même travail en faisant parcourir le même chemin à son point d'application. D'après cette définition et ce que l'on a dit précédemment, si l'on nomme T le travail développé par

l'effort variable et E le chemin total parcouru par le point d'application, on aura $T = F.E$; d'où

$$F = \frac{T}{E}.$$

Ainsi l'on obtiendra l'effort moyen d'une force variable en divisant le travail total par le chemin parcouru. Il résulte aussi de là que, le travail de l'effort variable étant représenté (fig. 8) par l'aire A*abcdef*M, le travail de l'effort moyen constant correspondant sera représenté par la surface du rectangle AA'M'M de même aire que la courbe.

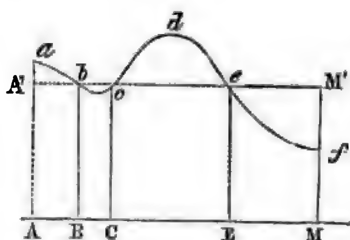


Fig. 8.

Il est bon de remarquer, dès à présent, que les points *b*, *c* et *e*, où la courbe des efforts variables coupe la ligne A'M' de l'effort moyen constant, correspondent à des positions où ces deux efforts, ainsi que le travail élémentaire qu'ils développent sont égaux. De plus les aires A'*ab* et *cde* au-dessus de la droite A'M' représentent l'excès du travail de l'effort variable sur celui de l'effort constant pendant que le corps parcourt les distances AB et CE, tandis que les aires comprises entre la courbe et le dessous de A'M' représentent les excès du travail de l'effort constant sur celui de l'effort variable. La somme des premiers excès doit d'ailleurs évidemment être égale à la somme des seconds.

22. *Observations sur le mode de calcul suivi par les praticiens anglais.* — Quelques auteurs, et particulièrement des ingénieurs praticiens anglais, prennent souvent dans le calcul de l'effet des machines à vapeur la moyenne arithmétique entre les efforts ou pressions extrêmes pour l'effort moyen, et la multiplient par le chemin parcouru. Or, si, par exemple, il s'agit du travail développé par la vapeur pendant sa détente, la courbe qui donnerait l'effort corres-

pondant à chaque course du piston serait, comme on le verra et comme l'indique la figure, convexe vers la ligne des abscisses; et, en prenant la moyenne arithmétique entre les ordonnées extrêmes, puis la multipliant par *ac*, on aurait l'aire du trapèze *abdc*, bien supérieure à celle de la courbe.

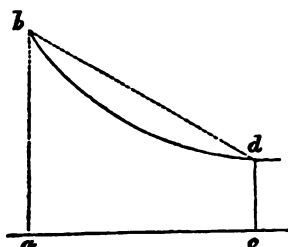


Fig. 9.

23. *Cas où l'on peut prendre la moyenne arithmétique d'un certain nombre de valeurs variables pour celle de l'effort moyen.* — Mais quand les valeurs de l'effort oscillent périodiquement autour d'une certaine valeur ou entre certaines limites, qu'elles sont en très-grand nombre et prises d'une manière indépendante de la périodicité plus ou moins régulière de leurs oscillations, on peut, avec une exactitude suffisante pour la pratique ordinaire, prendre la moyenne arithmétique d'un grand nombre de ces valeurs pour l'effort moyen. C'est en particulier ce qui arrive dans les expériences sur l'action des moteurs animés, sur l'effort transmis aux machines diverses de fabrication, ainsi qu'on en verra des exemples.

24. *Applications.* — On a vu que, dans une expérience citée à la précédente leçon, le travail développé par les trois chevaux attelés à un bateau poste était de $4771^{km},33$ pour un espace de 48^{m}. L'effort moyen qui aurait produit le même travail serait

$$\frac{4771^{km},33}{48^{m}} = 99^{k},38,$$

ou par chaque cheval

$$\frac{99^{k},38}{3} = 33^{k},13.$$

De même, dans l'exemple relatif au travail développé sur le piston de la machine de l'atelier d'ajustage d'Indret, on a

trouvé pour une course de $0^m,92$ un travail total de $1315^{km},318$. L'effort moyen correspondant serait

$$\frac{1315^{km},318}{0^m,92} = 1429^k,6.$$

La surface totale du piston étant de 1020 cent. carrés, cet effort moyen correspond à une pression de

$$\frac{1429^k,6}{1020} = 1^k,402$$

par centimètre carré.

23. *La notion du travail est indépendante du temps.* — On voit par ce qui précède que la mesure du travail ne suppose qu'un effort exercé et un chemin parcouru dans la direction propre de cet effort. Elle est donc par elle-même indépendante du temps. Ainsi, par exemple, dans l'élévation des fardeaux ce n'est pas par la durée du travail que l'on règle les prix, mais par le produit de la charge et de la hauteur d'élévation.

Cependant, lorsque le travail est longtemps et périodiquement répété de la même manière, il est clair que, quand on a sa mesure pendant un certain temps, elle suffit pour déterminer celle qui est relative à une autre durée. C'est ainsi que, dans la marche périodique des machines à vapeur, des roues hydrauliques, des moteurs animés, on rapporte le travail à l'unité de temps, que l'on prend ordinairement égale soit à 1 jour, à 1 heure, à 1 minute ou à 1 seconde. Cette dernière unité est celle que nous emploierons le plus souvent.

Pour les moteurs animés, dont le travail a une durée limitée par la fatigue et par la nécessité du repos, il faut joindre à l'estimation du travail en 1 seconde l'indication de la durée totale de ce travail, car elle influe beaucoup sur le travail dans chaque unité de temps. Ainsi un fort cheval de roulage peut travailler 8 à 10 heures par jour en développant au pas à la vitesse de $1^m,00$ en 1 seconde une

quantité de travail de 60 à 65^{km}, tandis que les chevaux employés au halage du bateau poste qui, dans le cas que nous avons calculé, développaient un effort moyen de 33^{kil},13 en parcourant 4^{m},71 en 1 seconde, ce qui correspond à un travail de 33^{kil},13 $\times$ 4^{m},71 $=$ 156^{km},04, ne peuvent travailler que 2 heures au plus par jour en quatre reprises, se reposent un jour sur quatre, et succombent rapidement à ce service pénible.

26. *Dénominations diverses du travail mécanique.* — L'effet mécanique des forces, que nous mesurons par le produit de l'effort et du chemin parcouru dans sa direction propre, a reçu différents noms qu'il est utile de connaître.

SMEATON, ingénieur anglais, auquel on doit d'utiles expériences sur les roues hydrauliques et sur les moulins à vent, le nommait *puissance mécanique;* CARNOT, *moment d'activité;* MONGE ET HACHETTE, *effet dynamique;* COULOMB et M. NAVIER, *quantité d'action;* MM. CORIOLIS et PONCELET, *quantité de travail.* — C'est cette dernière expression que nous adopterons comme la mieux appropriée au point de vue industriel, sous lequel nous considérons la mécanique.

27. *Unité de travail mécanique.* — Quant à la valeur de l'unité de travail, nous avons dit que nous adopterions le kilogramme élevé à 1 mètre. Quelques auteurs ont proposé pour unité de travail l'élévation de 1000 kil., ou d'une tonne à 1 mètre de hauteur, et lui ont donné le nom de *dyname* ou *dynamode.*

Une autre unité qui, malgré sa dénomination vicieuse, est passée en usage, c'est celle qu'on appelle la *force de cheval.* Cette expression, introduite par WATT, alors que la machine à vapeur se substituait successivement aux manéges, exprime en mesures anglaises un travail équivalent à 33 000 liv. avoir-du-poids élevées à 1 pied anglais en 1 minute; en la réduisant en mesures françaises, on trouve

$33\,000^{\text{liv}} \times 0{,}4534 = 14\,962^{\text{kil}},1$ pied anglais $= 0^{\text{m}},305$, ce qui donne pour la seconde de temps.

$$\frac{14\,962^{\text{kil}} \times 0^{\text{m}},305}{60''} = 76^{\text{km}},04 \text{ en } 1''.$$

La valeur généralement adoptée en France est de 75^{km} en 1 seconde.

Quoique cette estimation de la force de cheval soit aujourd'hui en quelque sorte une unité de convention, elle n'a pas de valeur légale, et il serait fort à désirer qu'une mesure législative lui donnât ce caractère, car c'est *la monnaie du travail industriel.* Il est sans doute inutile de dire que cette expression n'a pas de rapport direct avec le travail réellement développé par les chevaux attelés à des manéges, lequel ne s'élève guère en moyenne qu'à 40 ou 45^{km} en 1 seconde.

Exemple. Dans l'expérience relative à la machine à vapeur d'Indret, où nous avons trouvé le travail développé par la vapeur dans une course du piston égal à $1315^{\text{km}},318$, il y avait 28 coups doubles en 1 minute, et le travail par seconde était

$$\frac{1315^{\text{km}},318 \times 56}{60} = 1227^{\text{km}},6,$$

et la force en chevaux de

$$\frac{1227^{\text{km}},6}{75} = 16{,}37 \text{ chevaux.}$$

28. *Observations sur les conditions du travail mécanique.* — Nous avons dit que le travail d'une force se mesurait par le produit de son intensité et du chemin parcouru dans sa direction propre; mais il doit être sous-entendu que ce chemin est parcouru par l'effet même de la force. Ainsi un homme qui, dans un bateau, un convoi de chemin de fer, exercerait dans le sens du mouvement un effort sur un objet qui n'en recevrait pas de mouvement relatif, ne produirait aucun travail utile, quoique par l'effet du mouve-

ment de transport général le corps se mût dans la direction de l'effort.

Il en est de même du cas où l'effort est perpendiculaire au chemin parcouru; alors il y a pression, effort, mais point de travail produit par l'effort. Il en résulte des déformations, des frottements, donnant lieu, comme on le verra, à des pertes de travail, mais point d'effet utile immédiat. Nous ferons aussi remarquer que la définition du travail d'une force s'applique aussi bien au cas où le chemin parcouru par le point d'application de la force est dirigé en sens contraire de la force qu'à celui où il est dirigé dans le même sens. Dans ce dernier cas, le point d'application cédant et marchant dans le sens de la force, on dit que celle-ci développe un *travail moteur*; dans l'autre, où le point d'application se meut dans un sens contraire à celui de la force, on dit que le travail de celui-ci est un *travail résistant*.

29. *Transport horizontal des fardeaux.* — Ce genre de travail échappe au mode de mesure que nous avons adopté, ou du moins donne lieu à des effets, à des consommations de travail qui dépendent moins du poids transporté en lui-même que du mode de transport. Ainsi le transport d'un poids de 1000 kilogrammes qui se ferait par un traîneau glissant sur le sol, en donnant lieu à un frottement égal à 0,30 de la pression, exigerait par mètre parcouru un travail de $300^k \times 1^m$; par voiture des proportions ordinaires, le tirage étant $\frac{1}{30}$ de la charge, il faudrait un travail de $33^k,33 \times 1^m = 33^{km},33$; par chemin de fer à faible vitesse, la résistance n'étant que $\frac{1}{300}$ de la charge, le tirage serait

$$\frac{1000}{300} = 3^k,33,$$

et le travail pour 1 mètre égal à $3^{km},33$.

On voit donc que le travail relatif au transport horizontal des fardeaux ne peut se mesurer, comme on le fait quelque-

fois, par le produit du poids transporté et du chemin parcouru, qu'autant que l'on compare les résultats relatifs à des services, à des modes de transport du même genre.

30. ***Cas où la force n'agit pas dans la direction même du chemin parcouru.*** — Si le chemin parcouru est A*a*, tandis que la direction de la force est AF, il est clair que le chemin parcouru dans la direction même de la force sera déterminé par la perpendiculaire *ab*, abaissée de *a* sur AF, et égal à A*b*. Le travail développé par la force F sera donc, d'après la définition, F × A*b*.

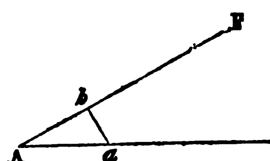


Fig. 10.

C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de faire sentir par la considération de la figure ci-contre. Soit AB la direction de la force P sollicitant à un instant quelconque le corps qui décrit la courbe LM, sur laquelle il est supposé parvenu au point A. Si l'on conçoit que la ligne AB soit un fil inextensible et parfaitement flexible, et que l'action de la force P soit remplacée par celle d'un poids Q agissant à l'extrémité de ce fil, que l'on suppose enroulé à la circonférence d'une poulie *o* parfaitement mobile autour de son axe, il est clair que dans le déplacement élémentaire du corps de A en *a* le travail de la force P sera mesuré par le produit du poids Q multiplié par la quantité *bb'* dont il sera descendu. Or cette quantité *bb'* est égale à la différence de longueur des lignes AB et *a*B, dont le point d'intersection B peut être regardé comme le point de contact instantané des directions AB et *a*B avec la circonférence extérieure de la poulie. Mais, en enroulant la ligne *a*B sur la circonférence, son ex-

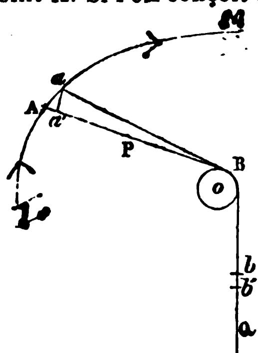


Fig. 11.

trémité a décrira un arc élémentaire de développante de cercle aa' perpendiculaire à AB, et la longueur Aa' mesurera précisément la différence cherchée. L'arc aa' se confondant à la limite de la petitesse avec la perpendiculaire abaissée du point a sur AB, on voit en définitive que Aa' est ce que l'on nomme en géométrie la projection du chemin réellement parcouru Aa sur la direction de la force, et dès lors il devient évident par cette figure que le travail élémentaire de la force P est mesuré par le produit $P \times Aa'$ de son intensité et de la projection Aa' sur sa direction propre du chemin infiniment petit Aa que son point d'application parcourt réellement.

En résumé, lorsque la force n'est pas dans la direction du chemin parcouru, le travail dû à un déplacement élémentaire Aa de son point d'application est le produit de l'intensité de la force par la projection de ce déplacement Aa sur sa direction. Or ce produit est ce que l'on appelle en mécanique rationnelle le *moment virtuel*, tandis que nous lui donnons le nom de *travail élémentaire*. Cette identité nous conduira à plusieurs analogies avec les résultats de la mécanique rationnelle; mais l'expression si naturelle de travail nous facilitera plus d'une démonstration qu'elle rendra pour ainsi dire évidente.

31. *Exemples. Travail de la pesanteur sur un corps qui parcourt une courbe quelconque.* — Si l'on considère le corps parvenu en A, et parcourant ensuite le petit chemin élémentaire Aa, le travail élémentaire correspondant développé par la pesanteur, dont la direction est verticale, sera le produit du poids P du corps par la hauteur Ab qu'il a parcourue dans le sens de cette force. La pesanteur étant constante pour un même lieu et des hauteurs peu différentes à la surface de la terre, le tra-

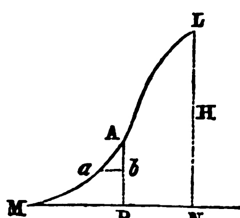


Fig. 12.

vail total développé après que le corps sera descendu de L en M sera le produit de P par la somme des projections analogues à A*b* ou par la hauteur totale de la descente H, et par conséquent égal à PH. Il est donc le même, quelle que soit la courbe de descente, et ne dépend que de la différence de niveau des extrémités de cette courbe.

32. *Manivelle et sa bielle.* — Lorsqu'une bielle est assez longue pour que l'on puisse faire abstraction de ses obliquités, et si l'effort exercé dans sa direction est constant, il est clair que le travail total développé pendant une demi-révolution sera le produit de l'effort constant F et de la somme des projections des arcs élémentaires A*a* sur sa direction, somme évidemment égale au diamètre 2R. Par conséquent le travail développé dans une demi-révolution est F×2R.

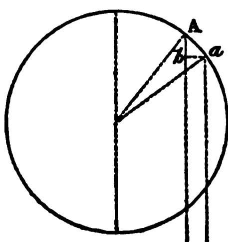


Fig. 13.

33. *Observation relative au sens de l'effort par rapport à celui du chemin parcouru.* — Si le chemin parcouru est dirigé en sens contraire de la direction de l'effort F, il est clair que le corps est entraîné par une autre force par rapport à laquelle l'effort F est une résistance vaincue; on dit alors que le travail de la force F est résistant, soustractif ou négatif, c'est-à-dire qu'il doit se retrancher du travail moteur dont il consomme, absorbe une partie.

Ainsi, lorsqu'un corps descend sous l'action de la pesanteur, le chemin parcouru étant décrit dans le sens même de la force, elle agit comme puissance, et son travail est positif; lorsqu'au contraire le corps monte, le chemin est parcouru en sens contraire de la force; celle-ci agit comme résistance, et le travail est négatif. Si le corps descend et monte alternativement de la même hauteur, le travail moteur développé pendant la descente est égal au travail résistant consommé pendant la montée, et le travail total est

nul. Il y a ainsi production et consommation alternatives de travail dans tous les cas où des corps montent et descendent périodiquement, comme les bielles, les manivelles, les pistons, les pendules, etc.

34. *Ressorts.* — Il se produit de même une consommation de travail dans la flexion des ressorts et une restitution dans leur retour à la forme primitive. Elle est complète si le ressort reprend dans le débandement exactement la forme qu'il avait avant. Elle est incomplète et il y a consommation de travail toutes les fois que le retour à la forme primitive n'est que partiel.

35. *Dilatation et contraction.* — Il en est encore de même lorsque par l'action de la chaleur un corps se dilate, et les efforts énormes développés dans ce cas sont tout à fait analogues à ceux que produisent les autres causes. En effet on sait par l'expérience qu'entre certaines limites les corps s'allongent ou se contractent de quantités proportionnelles aux efforts auxquels ils sont soumis. Ainsi, par exemple, une barre de fer s'allonge ou se contracte d'une quantité I, qui exprimée en mètres est donnée par la formule

$$I = \frac{P^k}{20\,000}.$$

en appelant P la charge par millimètre carré de section, et I l'allongement par mètre courant. Réciproquement, quand une barre se contracte, elle exerce un effort égal à celui qui aurait été nécessaire pour produire cette même contraction, et l'on remarquera que cet effort ne dépend que de l'allongement par mètre courant.

Si, par exemple, une barre de fer de 30 millim. de côté à section carrée s'allonge de $I = 0^m,0005$ par mètre, l'effort capable de produire cet allongement sera

$$P = 20\,000 \times 0^m,0005 = 10^{kilogr} \text{ par millimètre de section,}$$

ou en tout de $\overline{30}^2 \times 10^k = 9000^k.$

Remarquant maintenant que de 0° à 100° une barre de fer doux s'allonge de $1^{mill},2205$ (voir les traités de physique) par mètre, il s'ensuivra que la quantité dont il faudra élever sa température pour l'allonger de $0^{mill},5$ par mètre sera donnée par la proportion

$$1^{mill},2205 : 100^o :: 0^{mill},5 : x = \frac{50}{1.2205} = 40^o,96,$$

soit 41°. Ainsi, en augmentant seulement la température de cette barre de 41° environ, on peut lui faire produire contre des obstacles qui s'opposeraient à son allongement un effort de 9000 kilogr.

Réciproquement, si cette barre, après avoir été chauffée et tendue, se refroidit, elle exerce des efforts de traction considérables dépendant du degré de refroidissement. Dans le cas d'un refroidissement de 41°, une barre de 30 millim. carrés exercerait un effort de contraction de 9000 kilogr.

Cette propriété importante des corps d'exercer des efforts de dilatation ou de retrait, de contraction, considérables, est souvent mise à profit dans les arts. Le cerclage des roues, des moyeux, des arbres de roues hydrauliques; celui des voûtes, et en particulier celui de la coupole de Saint-Pierre de Rome; le cerclage de la fonte, etc., en sont autant d'exemples.

Le redressement des murs du bâtiment de l'ancienne bibliothèque du Conservatoire a été, dit-on, opéré par des moyens analogues avec le plus grand succès. Les barres employées ont 60 millim. sur 22 millim. ou 1320 millim. carrés de surface. On les a chauffées au moyen d'un gril suspendu, et, à mesure qu'elles se sont allongées par la chaleur, on les a tendues à l'aide de forts écrous avec rondelles en fonte. Cela fait, on les a laissées refroidir. Si, par exemple, leur température a baissé de 41° seulement, le retrait a été de $0^{mill},0005$ par mètre, et l'effort correspondant de 10 kilogr. par millimètre carré; l'effort que chaque barre pouvait exercer était de

$$1320 \times 10^k = 13\,200^k.$$

Quant au travail développé par cette force, il est facile de le calculer. En effet, de 0° à 100° et même au delà l'expérience prouve que les allongements sont proportionnels aux températures, de sorte que, I' représentant l'allongement à 100° et I celui qui est relatif à T°, on a

$$I' : 100 :: I : T;$$

d'où

$$I = \frac{I'T}{100} = \frac{0^{m},001\,220\,5}{100}T,$$

par conséquent si l'on nomme L_1 la longueur de la barre à la température zéro, cette longueur croîtra par mètre courant et en passant à la température T de la quantité $I = KT$ et deviendra :

$$L = L_1 + KL_1T = L_1(1 + KT).$$

De même en passant de la température zéro à la température T' la longueur de la barre deviendra

$$L' = L_1(1 + KT').$$

L'allongement de la barre en passant de la température T à la température T' sera donc

$$L' - L = L_1K(T' - T)$$

et l'allongement par mètre courant sera

$$I = \frac{L' - L}{L_1} = K(T' - T).$$

D'où l'on voit que l'allongement par mètre courant ne dépend que de la différence des températures et non de l'élévation de chacune d'elles en particulier.

Il en est par conséquent de même de la force

$$P = I \times 20\,000^{kil} = 20\,000\,K(T' - T)$$

qui croît proportionnellement à la différence des températures et est la même pour des différences égales.

Cela posé, si l'on porte sur une ligne d'abscisses à partir de zéro les allongements $L' - L = KL_1(T' - T)$ qui sont d'abord

nuls pour $T'=T$, et qu'aux points de division qui en résultent on élève des perpendiculaires ou ordonnées égales aux efforts de dilatation ou de contraction qui ont pour valeurs celles que prend la force

$$P=20000I=20000K(T'-T),$$

il est clair que les ordonnées étant proportionnelles aux abscisses, les points ainsi déterminés seront en ligne droite, et que l'on formera ainsi un triangle, dont la surface exprimera le travail développé par les efforts de dilatation ou de contraction correspondants aux différentes températures $T'-T$.

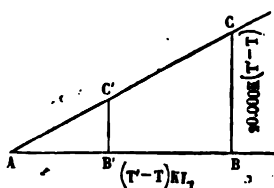


Fig. 14.

La surface de ce triangle est d'ailleurs égale à

$$\frac{1}{2}20\,000K^2L_1.(T'-T)^2,$$

de sorte que le travail développé par les efforts de dilatation ou de contraction a, en définitive, pour valeur,

$$10\,000K^2L_1(T'-T)^{2\,km},$$

ou en remettant pour K sa valeur $\frac{0^m,001\,220\,5}{100}$, cette expression du travail devient :

$$(0,001\,220\,5)^2L_1(T'-T)^{2\,km}.$$

Elle montre que ce travail est proportionnel à la longueur de la barre à la température de zéro et au carré de la différence des températures.

On voit de plus qu'il ne dépend point de ces températures elles-mêmes, mais bien de leur différence, de sorte qu'à une même variation correspond toujours le même travail.

Si l'on suppose $T=20^o$, $T'=61^o$, on a $T'-T=41^o$, et par

suite le travail par mètre courant et par millimètre carré de section de la barre est

$$(0{,}0\,012\,205)^2 \times \overline{41}^2 = 0^{km}{,}0025\,;$$

et pour les 1320 millimètres carrés, sur une longueur de 10 mètres, il sera

$$0^{km}{,}0025 \times 1320 \times 10 = 33^{km}{,}00.$$

36. *Limite de variations de température qu'il convient d'employer.* — Nous nous sommes borné dans les calculs précédents à cette variation de température, parce qu'elle correspond, comme on l'a vu, à un allongement ou à un raccourcissement de $0^{mill}{,}5$ par mètre et celui-ci à un effort d'extension ou de compression de 10 kil., qui, d'après l'observation des bonnes constructions, est une limite supérieure des efforts que le fer forgé peut supporter par millimètre carré de section, sans que l'on craigne d'altérer son élasticité, ainsi que nous le verrons plus tard. Il importe de se renfermer de même dans les limites d'extension ou de contraction entre lesquelles l'élasticité ne s'est pas altérée.

DES DYNAMOMÈTRES

OU DESCRIPTION ET CONSTRUCTION DES INSTRUMENTS PROPRES A MESURER LE TRAVAIL DÉVELOPPÉ PAR LES MOTEURS ANIMÉS OU INANIMÉS.

37. *Conditions générales et particulières auxquelles ces instruments doivent satisfaire.* — Nous avons vu dans les précédentes leçons que le travail développé par une force constante F qui faisait parcourir à son point d'application un chemin E dans sa direction propre avait pour mesure le produit FE, et que, si l'effort F était variable, le travail total développé quand le corps avait parcouru un chemin quelconque E était la somme de toutes les quantités de travail élémentaires F*e* successivement développées le long des éléments *e* du chemin parcouru. Dans ce dernier cas, nous avons montré comment, à l'aide du calcul ou de la méthode de quadrature de Simpson, on obtenait cette somme de produits analogues à F*e* pour un chemin total donné E parcouru dans la direction de l'effort. Enfin nous avons défini l'effort moyen d'une force variable et indiqué comment on le déduisait du travail total en divisant celui-ci par le chemin total parcouru.

Les instruments destinés à mesurer le travail développé par les moteurs animés ou inanimés doivent donc fournir par leurs indications le produit de l'effort et du chemin parcouru, quelles que soient leurs variations simultanées. Telle est la condition générale à laquelle il faut chercher à satisfaire toutes les fois qu'il n'y a pas d'impossibilité, comme il s'en présente pour les bateaux. L'illustre Watt est le premier qui ait satisfait à cette condition dans la con-

struction de l'appareil dynamométrique, auquel il a donné le nom d'*Indicateur de la pression*, et dont on trouvera plus loin la description. Cela posé, voici les conditions particulières qu'il convient encore de remplir :

1° La sensibilité de l'instrument doit être proportionnée à l'intensité des efforts à mesurer et ne doit pas pouvoir s'altérer par l'usage.

2° Les indications des flexions du ressort doivent être obtenues d'une manière indépendante de l'attention, de la volonté ou des préventions de l'observateur, et par conséquent fournies par l'instrument lui-même au moyen de traces ou de résultats matériels qui subsistent après l'expérience.

3° Il faut que l'on puisse obtenir l'effort exercé en chaque point de l'espace parcouru par le point d'application de l'effort, ou dans certains cas, à chaque instant de la durée des observations.

4° Si l'expérience doit être, par sa nature, continuée longtemps, il faut que l'appareil permette de totaliser facilement la quantité de travail dépensée par le moteur.

Pour satisfaire à la première condition, il convient d'employer des lames qui prennent des flexions proportionnelles aux efforts exercés, et qui aient la forme des solides d'égale résistance. Cela procure beaucoup de facilité pour les relèvements et donne à l'instrument une grande sensibilité.

38. *Règles pour proportionner les lames de ressort.* — La théorie de la résistance des matériaux à la flexion, d'accord avec les résultats connus de l'expérience, montre que, quand une lame métallique à section rectangulaire constante est encastrée par l'une de ses extrémités, et soumise à l'autre à l'action d'un effort P, perpendiculaire à sa longueur ou à sa direction primitive, ou quand une lame élastique de même forme est posée librement sur deux appuis et soumise en son milieu à un effort P, dirigé comme nous venons de le

dire, la flexion F qu'elle prend, tant qu'elle ne dépasse pas les limites de l'élasticité, est :

1° Proportionnelle à l'effort P;

2° Proportionnelle au cube du bras de levier *c* de cet effort;

3° En raison inverse de la largeur *a* de la lame dans le sens perpendiculaire au plan de flexion;

4° En raison inverse du cube de l'épaisseur *b* de la lame à la partie encastrée pour le premier cas, et en son milieu pour le second;

5° En raison inverse d'un nombre E constant pour chaque corps, qu'on nomme coefficient ou module d'élasticité et qui exprime en kilogrammes le poids qui serait capable d'allonger d'une quantité égale à sa longueur primitive une barre prismatique formée de cette substance ayant l'unité de surface pour section transversale, si un pareil changement dans les dimensions était possible sans que le nombre E variât de valeur.

De plus, si le profil longitudinal de la lame présente la forme parabolique des solides d'égale résistance (voir les Leçons sur la résistance des matériaux), les flexions sont doubles de celles que prendrait sous les mêmes efforts une lame d'épaisseur uniforme sur toute la longueur, et la résistance à la rupture reste la même.

D'après cela, on a pour des ressorts d'égale résistance, conformément à la théorie et à l'expérience, la relation

$$f=\frac{P.c^3}{E.a.b^3},$$

formule à l'aide de laquelle on peut calculer l'une quelconque des quantités qui y entrent, quand on connaît les autres. L'expérience de la construction d'un grand nombre de lames de ressorts m'a montré qu'en les faisant avec de l'acier d'Allemagne de bonne qualité, trempé et recuit au degré convenable, la valeur du coefficient d'élasticité à employer était

$$E = 20\,859\,000\,000 \text{ kilogrammes.}$$

38. *Rapport qu'il convient d'établir entre les diverses proportions.* — La largeur a de la lame doit être limitée à $0^m,040$ ou $0^m,050$ au plus, parce que le gauchissement produit par la trempe est d'autant plus sensible que la lame est plus large, ce qui offre des difficultés pour l'ajustage.

L'observation des ressorts que j'ai fait exécuter m'a montré que les flexions des lames restaient proportionnelles aux efforts, tant qu'elles ne dépassaient pas $\frac{1}{10}$ de leur longueur pour les plus fortes, $\frac{1}{9}$ pour les plus faibles, mesure prise depuis la partie encastrée.

D'après ces données il sera facile de calculer l'épaisseur b, qu'il conviendra de donner à une lame à sa partie encastrée, pour que sous un effort déterminé elle prenne une flexion connue. Elle est fournie par la formule

$$b^3 = \frac{Pc^3}{Eaf}.$$

39. *Profil longitudinal des lames.* — Cette dimension étant obtenue, on détermine la forme du profil longitudinal de la lame au moyen de la formule

$$y^2 = \frac{b^2}{c} x,$$

dans laquelle, b et c étant les quantités déjà désignées, x

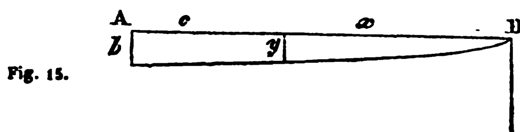


Fig. 15.

représenterait l'abscisse de la courbe mesurée depuis son origine B et y son ordonnée correspondante.

40. *Disposition des lames de ressorts* *. — Les lames des

---

* Voir pour plus de détails la description *des Appareils dynamométriques*, etc. Chez L. Mathias, 15, quai Malaquais.

ressorts destinés à mesurer la traction des moteurs animés, sur des voitures, des charrues, des bateaux, etc., sont disposées comme l'indique la figure (pl. I, fig. 1).

Deux lames *aa'* et *bb'* exactement semblables, dont les faces intérieures sont planes, et les faces extérieures paraboliques, sont terminées à leurs extrémités par un nœud d'articulation de même largeur, percé d'un trou alésé. De petits boulons en acier traversent ces trous à frottement doux et s'engagent dans des brides *ff* sur lesquelles ils sont fixés par des écrous.

Une griffe postérieure *c* est percée d'une ouverture pour le passage de la lame qui s'y introduit dans le sens de sa longueur; un épaulement d'une longueur égale à la largeur de la griffe a été ménagé au milieu de la lame et entre avec précision dans cette ouverture. Des vis de pression *g* à pointe conique serrent la lame dans cet encastrement.

Une griffe antérieure *d* reçoit pareillement la lame *aa'* et porte un anneau *r*, auquel s'accroche la volée ou la corde sur laquelle le moteur agit.

L'accouplement des lames a pour effet d'ajouter les flexions de chacune d'elles et d'augmenter la sensibilité de l'instrument.

Pour les grands efforts à mesurer, on peut réunir quatre lames dont les résistances concourent à faire équilibre à la puissance.

On évite que les lames puissent être forcées en fixant à la griffe postérieure *c* deux brides d'arrêt *i* réunies par deux entretoises *e* contre lesquelles la lame antérieure vient s'appuyer quand la tension atteint la limite supérieure que l'on a fixée.

41. *Disposition pour obtenir une trace permanente des flexions du ressort.* — La griffe antérieure porte une vis à travers laquelle peut glisser à frottement doux un tuyau de cuivre creux terminé par une douille conique, dans laquelle on adapte un pinceau sans plume. On remplit le tube d'encre

Anneau. Shackle.

Écartement. Digression.

de Chine délayée à la consistance convenable. Quand le pinceau est bien lavé et convenablement serré dans sa douille conique, la capillarité suffit pour produire une alimentation constante et régulière.

On peut à volonté remplacer le pinceau par un crayon de mine de plomb ordinaire ou du genre de ceux qui ne se taillent pas. Il faut alors que le tube et le crayon pèsent environ 40 grammes pour que la trace soit suffisamment visible.

Les traces du style sont reçues sur une bande de papier enroulée sur un cylindre *l* servant de magasin, et qui passe sur trois petits cylindres qui la guident sous les styles et empêchent le papier de fléchir sous l'action du vent ou sous son propre poids.

La feuille de papier s'enroule sur un autre rouleau *g* qui sert de récepteur et sur lequel une de ses extrémités a été fixée avec de la colle à bouche.

Un second style *k*, porté par l'une des brides d'arrêt, et par conséquent immobile, trace sur le papier une ligne qui correspond à un effort nul ou à la position des lames au repos et donne ainsi le zéro des efforts ; de sorte que l'effort exercé est toujours mesuré par l'écartement de la courbe tracée par le style mobile à cette ligne du zéro.

42. *Manière de faire mouvoir le papier qui reçoit la trace du style.* — Le mouvement de transport perpendiculaire à la direction des efforts exercés est transmis à la bande de papier au moyen d'une corde sans fin, qui passe sur le moyeu de l'une des roues de devant de la voiture et sur une poulie de renvoi. Sur le prolongement de l'axe de cette poulie est une vis sans fin parallèle aux lames, et qui conduit un pignon monté sur l'axe d'un petit cylindre. Sur celui-ci s'enroule une corde de soie qui transmet le mouvement au cylindre récepteur du papier.

En proportionnant convenablement cette transmission, on peut, au moyen de bandes de papier de 16 à 18 mètres

de longueur, prolonger avec une même bande les expériences sur une étendue de chemin parcourue de 800 à 1000 mètres et plus.

Mais si le mouvement était transmis directement à l'arbre du cylindre récepteur, dont le papier, en s'enroulant, augmente le diamètre extérieur, il s'ensuivrait que, bien que le mouvement du cylindre fût uniforme ou dans un rapport constant avec celui de la roue, celui de transport de la bande de papier s'accélérerait. Pour éviter cet inconvénient, le fil de soie enroulé sur le petit cylindre intermédiaire *n* se fixe par son extrémité libre à une fusée conique dont les diamètres sont calculés de manière à compenser l'accroissement graduel de diamètre du cylindre récepteur, et dont la surface est cannelée en filets héliçoïdes.

43. *Observation sur la quadrature des courbes tracées.* — D'après cette description sommaire on voit que, le papier se déroulant sous le style avec une vitesse qui est dans un rapport constant avec le chemin parcouru, les longueurs de papier représentent ce chemin à une échelle connue par ce rapport. Les ordonnées de la courbe des flexions, mesurées depuis la ligne du zéro, étant proportionnelles aux efforts exercés, il en résulte donc que l'aire comprise entre la courbe, la ligne du zéro et deux ordonnées quelconques, représentera, selon ce qui a été dit au nº **18**, le travail total développé dans cet intervalle par la puissance motrice.

44. *Moyens d'opérer cette quadrature.* — Cette quadrature peut s'opérer, soit par de simples tracés et calculs ordinaires, soit par le relèvement des ordonnées à l'aide d'une glace transparente, préalablement divisée. Mais cette méthode est longue, et l'on peut lui substituer l'une des deux suivantes.

La première, qui dispense de tout calcul, consiste à tracer d'abord parallèlement à la ligne du zéro MN une ligne droite AB à une distance donnée de la ligne du zéro plus grande que la flexion maximum ou qui lui soit au plus

égale. A cette ordonnée correspondrait un effort fictif constant, auquel serait dû un travail connu, représenté par

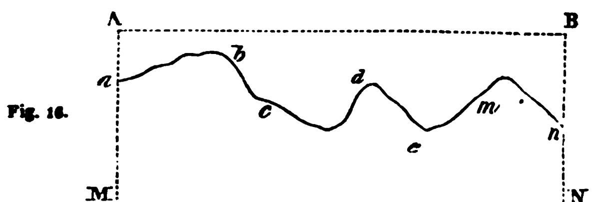


Fig. 16.

l'aire du rectangle MNBA. Or, *abcd*...NM étant la courbe réelle des efforts donnés par l'expérience, on a évidemment la proportion.

L'aire MNBA : l'aire *abc*...NM : : le travail de l'effort fictif constant : au travail cherché.

Mais, le papier étant fabriqué à la mécanique et d'épaisseur uniforme, les aires MNBA et M*abc*.....N sont entre elles comme leurs poids. Donc en les découpant, et pesant d'abord le rectangle entier, puis l'aire curviligne M*abc*.....N, on aura par une simple proportion le travail cherché.

Si, par exemple, l'on a employé un ressort de 700 kilogr., pour lequel un accroissement de flexion de $1^{mill},25$ corresponde à un effort de 10 kilogr. et une flexion constante ou une hauteur du rectangle de 70 mill. à 560 kilogr., en appelant P le poids de la bande de 70 mill. de hauteur, p le poids de la partie comprise entre la courbe et la ligne du zéro, E la longueur du chemin parcouru, F l'effet moyen développé par le moteur, on aura

$$F = 560 \cdot \frac{p}{P} \text{ kilogrammes,}$$

et le travail total de l'effort variable aurait pour valeur le produit FE.

45. *Usage du planimètre.* — Le second moyen d'obtenir la quadrature des courbes rapidement et sans calculs, c'est d'y employer le planimètre d'Ernst muni d'un cône en bois.

Cet instrument se compose (pl. I, fig. 3 et 4) d'un cône *bcb*, dont l'axe est incliné sur le plan de la table qui porte l'instrument, de façon que son arête supérieure soit parallèle à ce plan. Ce cône est monté à pointes sur deux supports fixés à une platine X, et sur son axe prolongé est une roulette *aa*, qui est pressée contre une bande LL, parallèle aux guides, suivant lesquels peut glisser la platine XX; de sorte que, quand on pousse cette platine en avant ou en arrière, dans le sens de LL, la roulette et le cône tournent et font un nombre de tours proportionnel au chemin parcouru par le plateau.

Un compteur, dont la pièce principale est une roulette *dd* verticale et perpendiculaire à l'arête horizontale supérieure du cône, tournant autour d'un axe parallèle à cette même arête, est monté à pointes sur une pièce à coulisses *ff*, qui se meut avec la platine XX, mais qui peut en outre recevoir un mouvement perpendiculaire à la bande LL, de façon que la roulette peut se rapprocher ou s'éloigner à volonté du sommet du cône.

Le compteur reposant sur la surface du cône par son propre poids, on conçoit que, quand ce cône tourne, la roulette en fait autant, et il est évident que le nombre de tours qu'elle fait est toujours proportionnel : 1° au nombre de tours du cône ou à la longueur du chemin parcouru dans le sens LL, et 2° à la distance de la roulette au sommet du cône, ou au produit de ces deux quantités.

Cela posé, supposons que, la roulette étant au sommet du cône, une pointe *g* placée sur la coulisse *ff* corresponde à une ligne RS parallèle au guide LL et soit sur le point R, il est évident que, si l'on pousse la platine XX, de façon que cette pointe suive exactement la ligne RS, la roulette ne tournera pas, puisque la vitesse du sommet du cône est nulle; mais si la pointe *g* est en M, et la roulette à une distance du sommet du cône égale à MR = NS, lorsque la pointe sera poussée de M en N, le nombre de tours de la roulette sera proportionnel à la longueur RS, qui est la base

du rectangle MNSR et à la hauteur du même rectangle. Il le sera par conséquent à la surface de ce rectangle. De même, si l'on fait suivre à la pointe *g* la ligne OP, le nombre de tours de la roulette sera proportionnel à la surface du rectangle ORSP.

Mais dans l'exécution de l'instrument l'on ne peut faire arriver la roulette jusqu'au sommet du cône, qui est supprimé, et il faut modifier un peu la manière d'obtenir la surface du rectangle à mesurer.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de calculer la surface du rectangle OMNP. L'on amène d'abord la pointe *g* au-dessus de la ligne MN en s'assurant qu'elle la suit bien exactement dans le mouvement de transport de la platine XX. On pousse alors tout l'instrument de façon que cette pointe *g* aille de M en N. La roulette du compteur fait alors un nombre de tours proportionnel à la surface du rectangle RMNS. On tire ensuite la coulisse *ff* et l'on conduit la pointe *g* au-dessus du point P, puis l'on ramène la platine XX en arrière, de manière que la pointe *g* suive la ligne PO.

Dans ce mouvement rétrograde la roulette tourne en sens contraire et fait un nombre de tours proportionnel à la surface du rectangle ORSP, et comme dans ces deux mouvements consécutifs elle a marché dans deux sens opposés, il est évident que le nombre définitif des tours qu'elle a faits est proportionnel à la différence des deux rectangles ORSP et MRSN ou à la surface du rectangle OMNP.

Le mouvement de la roulette se transmet par des engrenages aux aiguilles de deux limbes, dont l'une donne les unités, dizaines et centaines de millimètres carrés, et l'autre les mille de millimètres carrés.

Ce que nous venons de dire pour un rectangle s'applique exactement à la quadrature d'une surface terminée, comme dans les courbes tracées par le style des dynamomètres, d'un côté par une ligne droite et de l'autre par une ligne courbe ondulée *op*, car chaque élément de cette surface

uvxy peut être regardé comme un petit rectangle dont la base est *ux*, et la hauteur la moyenne arithmétique entre *uv* et *xy*.

Pour procéder au relèvement d'une courbe ou à la quadrature d'une surface MN*po*, on opère ainsi qu'il suit : On fixe la feuille de papier sous la planchette du planimètre, de façon que, la pointe *g* étant reculée au plus près de cette planchette, elle suive exactement la ligne MN du zéro des efforts, quand on pousse le plateau X*x* dans le sens de M en N. Cela fait, l'on ramène la pointe *g* au-dessus de M, on soulève le compteur et l'on ramène à la main les aiguilles des deux limbes au zéro; on pose doucement la roulette sur le cône, et l'on pousse la platine XX, de façon que la pointe *g* aille de M en N. On tire alors la coulisse *ff*, pour amener la pointe *g* sur le point *p*; puis, à l'aide du double mouvement qu'on peut lui imprimer, on suit exactement avec cette pointe toutes les sinuosités de la courbe, jusqu'à ce qu'elle soit parvenue en *o*. On lit alors sur les deux limbes le nombre de millimètres carrés contenus dans la surface à carrer, et en la divisant par la longueur de la base MN, exprimée en millimètres, on a pour quotient l'ordonnée moyenne ou la hauteur du rectangle de même surface, et par suite l'effort moyen exercé. Mais, pour que les opérations que nous venons d'indiquer conduisent à un résultat exact, il faut que dans ses mouvements d'avancement ou de recul la roulette ne glisse jamais sans tourner. L'on obtient ce résultat en substituant au cône poli de métal des planimètres ordinaires un cône en bois complétement dépoli.

46. *Dynamomètre pour totaliser la quantité d'action développée pendant un intervalle de temps ou de chemin considérable.* — Lorsqu'il s'agit d'observer le travail développé par des moteurs animés ou autres pendant un long intervalle de chemin parcouru, le dynamomètre à style, dont la bande de papier ne peut guère servir que pour une distance de 800 à 1000 mètres, serait insuffisant. Il est d'ailleurs souvent

beaucoup plus commode d'obtenir de suite la quantité de travail développé le long d'un chemin donné, et il importe d'avoir un appareil qui totalise de lui-même les quantités de travail élémentaires successives, et dispense ainsi des quadratures que nous avons appris à exécuter. Tel est le but de la modification suivante apportée au dynamomètre décrit dans les numéros précédents.

La griffe postérieure *c* (pl. I, fig. 5) est traversée par un axe de rotation sur lequel est vissé le plateau B de $0^m,080$ de rayon, placé au-dessus des lames, et qui reçoit à sa partie inférieure une poulie D à laquelle le mouvement de la roue est transmis par une corde sans fin passant sur des poulies de renvoi. Un support E faisant corps avec la griffe antérieure *d* soutient un compteur qui par conséquent suit tous les mouvements de flexion de la lame antérieure.

La pièce principale du compteur est une roulette montée sur un axe parallèle au plateau et à la direction des efforts de traction. Cette roulette agit comme celle du compteur du planimètre; seulement, puisque, au lieu d'un cône, nous avons ici un plan, elle peut atteindre le centre de ce cercle quand l'instrument est au repos. D'après ce qui a été dit au n° 45, il est inutile d'indiquer le jeu de l'instrument, et l'on conçoit de suite que le nombre de tours de la roulette est proportionnel à la somme des produits élémentaires des efforts exercés et des éléments de chemin parcouru ou au travail total.

En nommant r la distance de la roulette au centre du plateau en mètres sous l'effort de traction F exprimé en kilogrammes ou la flexion du ressort sous cet effort, attendu que l'instrument est disposé de façon que la roulette repose au centre du plateau quand l'effort est nul;

r_1 le rayon de la roulette;

e le chemin parcouru en une seconde par la voiture dans le sens du tirage, si l'effort est constant, ou dans un instant infiniment petit, si l'effort est variable;

R le rayon de la roue sur laquelle on prend le mouvement;

$n=\frac{e}{2\pi R}$ le nombre de tours de la roue correspondant au chemin e;

$K=\frac{F}{r}$ le rapport des efforts aux flexions mesurées;

N le nombre de tours de la roulette correspondant au chemin e;

R′ le rayon du moyeu de la roue sur laquelle on prend le mouvement du plateau;

r' le rayon de la poulie du plateau;

Il est évident que ce plateau fera un nombre de tours égal à $\frac{R'}{r'}$ pour un tour de la roue, ou bien à $\frac{e}{2\pi R}\cdot\frac{R'}{r'}$ pour le chemin e parcouru dans le sens du tirage.

La roulette fera $\frac{r}{r_1}$ tours pour un tour du plateau; on aura donc

$$N=\frac{e}{2\pi R}\cdot\frac{R'}{r'}\cdot\frac{r}{r_1},$$

pour le nombre de tours de la roulette correspondant à un chemin parcouru e sous l'effort de traction F.

Le nombre N étant d'ailleurs fini ou infiniment petit selon qu'il s'agit d'un effort constant et d'un chemin fini, ou d'un effort variable et d'un élément de chemin. Mais on a par définition

$$K=\frac{F}{r},\quad \text{d'où } r=\frac{F}{K},$$

et par suite
$$N=\frac{R'}{2\pi R r' r_1 K}.Fe;$$

d'où
$$Fe=\frac{2\pi R\ r' r_1 K}{R'}.N.$$

Ainsi, soit pour un effort constant et un travail fini, soit pour un effort variable et un travail élémentaire, on voit

que le travail développé par le moteur est mesuré par le produit du facteur constant

$$\frac{2\pi R.r'r_1K}{R'}$$

et du nombre N de tours, ou fraction élémentaire de tours faits par la roulette, de sorte que, le travail total au bout d'un intervalle quelconque étant la somme des quantités de travail élémentaires successivement développées, il sera égal au même produit en prenant le nombre N égal au nombre total de tours de la roulette pendant l'intervalle observé.

Des instruments de ce genre ont été employés avec succès et avec la plus grande facilité à des expériences prolongées sur le tirage des voitures, et ils ont permis de déterminer les quantités totales de travail développées par des attelages de 6 chevaux pendant des journées entières de marche, et pour des routes de Paris à Amiens, à Nancy et au Mans.

47. *Disposition pour obtenir des indications du nombre de tours faits par la roulette.* — Il est facile de concevoir que, l'axe de la roulette portant une vis sans fin, son mouvement se communique aisément par des engrenages convenablement proportionnés à deux limbes, dont l'un indique les unités et les dizaines de tours, et l'autre les centaines, les mille de tours de la roulette. Mais de plus, afin de pouvoir observer les divisions de ces limbes sans arrêter l'instrument ou la marche, on a disposé deux styles qui, traversant deux godets remplis d'encre grasse, viennent déposer sur des limbes émaillés un point noir quand on appuie le doigt sur un bouton. Les observations peuvent ainsi être faites et multipliées sans que les résultats se confondent.

48. *Dynamomètre à moteur chronométrique.* — Lorsque l'on veut faire des expériences sur la résistance des bateaux au halage ou sur les charrues sans avant-train, il serait au

moins fort difficile, et dans quelques cas impossible, de mettre le mouvement du papier en rapport constant avec le chemin parcouru. Dans ce cas, il est beaucoup plus commode d'employer un moteur chronométrique qui communique au papier un mouvement sensiblement uniforme. Alors les longueurs de papier développées représentent les temps, et la quadrature de la courbe des flexions donne la somme des produits $F \times t$ de chaque effort par sa durée élémentaire, ou ce qu'on appelle, comme nous le verrons plus tard, la quantité de mouvement totale développée dans l'intervalle de temps considéré. En divisant ensuite l'aire obtenue par le temps total ou par la longueur du papier développé, on a l'effort moyen de la puissance motrice.

Dans le halage des bateaux et dans tous les cas où la vitesse peut exercer de l'influence sur les résultats, on se sert de deux pinceaux auxiliaires dont l'un sert à marquer sur le papier des points correspondants à des intervalles égaux de temps de 15″, 30″, etc., et l'autre les chemins parcourus d'après l'observation des passages devant des poteaux ou objets éloignés de distances connues.

49. *Dynamomètre de rotation.* — Les instruments que nous venons de décrire n'ont été construits que pour mesurer l'effort ou le travail développé par les moteurs dont l'action a lieu en ligne droite ou circulairement; mais il a été facile de les modifier de manière à obtenir le travail transmis par un axe de rotation à une machine quelconque, en appliquant le principe des styles ou celui du compteur.

50. *Description du dynamomètre de rotation à styles.* — Sur un arbre posé sur deux supports en fonte fixés à un plateau en bois sont placées trois poulies de même diamètre (pl. II, fig. 1 et 2) : l'une, A, est fixe; l'autre, C, voisine de la première, est folle, et la dernière, B, est mobile autour de l'arbre entre des limites que nous indiquerons.

Cet appareil étant interposé entre un arbre moteur et une machine dont on veut mesurer la résistance, la poulie folle

C reçoit la courroie de transmission de l'arbre moteur, et quand on fait passer cette courroie sur la poulie fixe A, l'arbre se met en mouvement et prend une vitesse qui dépend du rapport du diamètre de la poulie à celui du tambour de l'arbre moteur.

La poulie B reçoit une courroie qui doit transmettre le mouvement à la machine et vaincre la résistance; mais comme elle est à frottement doux sur l'arbre, elle ne serait pas entraînée dans le mouvement communiqué à cet arbre par la poulie fixe, si un arrêt, qui fait corps avec elle, n'était pressé par l'extrémité d'une lame de ressort implantée dans l'arbre suivant un de ses rayons. Cette lame, tournant avec l'arbre, agit sur l'arrêt, dont la résistance la fait fléchir, et quand sa résistance à la flexion est susceptible de vaincre celle que la machine oppose, le mouvement commence, et se trouve ainsi transmis de l'arbre moteur à la machine en expérience par l'intermédiaire d'une lame de ressort, dont les flexions sont la mesure immédiate de la résistance à vaincre.

Un style ajusté sur l'un des bras de la poulie s'approche à volonté d'une bande de papier douée d'un mouvement propre en rapport constant avec celui de la poulie ou de l'arbre, et y trace une courbe des flexions du ressort absolument de la même manière que dans les dynamomètres employés pour les voitures.

Un autre style, immobile par rapport au premier, trace en même temps une ligne correspondante à une flexion nulle, ou à la position qu'occupait le style mobile quand l'effort était nul. Cette ligne du zéro se trouve vers le milieu de la largeur du papier, afin que l'effort puisse être mesuré indifféremment dans un sens ou dans l'autre.

Les lames employées sont à section parabolique, et l'on peut les multiplier autant qu'on le veut, selon l'intensité des efforts que l'instrument doit mesurer.

Un arrêt fixe, placé sur l'arbre, limite le déplacement de la poulie et par suite la flexion des lames, ce qui les em-

pêche d'être forcées dans le cas d'efforts accidentels trop considérables.

81. *Transmission du mouvement de l'arbre à la bande de papier.* — Un anneau denté est ajusté à frottement doux sur l'arbre, et sa denture héliçoïdale engrène avec un pignon dont l'axe, compris dans un plan perpendiculaire à celui de l'arbre, ne rencontre pas celui-ci. L'arbre de ce pignon porte une vis sans fin, qui conduit un autre pignon monté sur le prolongement de l'axe du petit cylindre sur lequel s'enroule la soie qui entraîne la fusée. Quand on veut faire marcher la bande de papier, on rend immobile l'anneau denté au moyen d'un embrayage sur lequel un arrêt fixé à cet anneau vient se poser, quand on le tourne convenablement. Alors, l'anneau denté étant fixe dans l'espace, tandis que le pignon emporté par l'arbre roule autour de lui, ce pignon prend un mouvement relatif qu'il transmet à la vis, à la fusée et à la bande de papier.

Dans ces appareils on se sert encore d'une fusée conique pour commander le mouvement de la bobine qui porte le papier; on compense, par l'emploi de cet organe intermédiaire, l'accroissement relatif dans la vitesse de translation de la bande de papier qui résulterait, sans cette précaution, de l'augmentation de diamètre du rouleau moteur, sur lequel les épaisseurs successives du papier viennent s'accumuler à mesure que s'effectue le tracé de la courbe dynamométrique.

82. *Résultats d'expériences faites avec le dynamomètre de rotation.* — Comme exemples des résultats que l'on peut obtenir avec les dynamomètres de rotation, nous rapporterons ici quelques-uns de ceux qui ont été obtenus sur les scieries et machines de charronnage mécanique des ateliers des Messageries impériales à Chaillot.

DÉSIGNATION des MACHINES.	ESSENCE et QUALITÉ DES BOIS.	LONGUEUR du trait de scie.	SURFACE de bois scié.	TRAVAIL CONSOMMÉ en chevaux en 1'.	TRAVAIL POUR SCIER 1m,1,00 de surface.
		m.	m.c.	ch.	kil.
Scierie verticale à une lame.	Chêne de 3 ans de coupe......	0,355	0,7135	2,82	74520
	Frêne de 2 ans de coupe......	0,296	0,6020	2,45	73850
	Orme tendre de 4 ans de coupe.	0,480	1,1652	4,60	90310
	Grisard ou tremble de 4 ans id.	0,390	0,6202	2,67	68370
	Orme tortillard de 1 an de coupe.	»	0,5409	3,48	118200
Scie circulaire de 0m,620 de diamètre.	Frêne de 3 ans de coupe......	0,173	0,1405	2,80	142000
	Id................	0,123	0,1571	2,375	80450
	Id................	0,087	0,1250	1,665	75880
	Id................	0,042	0,0602	1,910	71260
	Id................	0,021	0,0301	1,775	67440

Machines de la charronnerie mécanique.

DÉSIGNATION des MACHINES.	ESSENCE ET QUALITÉ DES BOIS ou NATURE DU TRAVAIL.	TRAVAIL MOYEN en chevaux.
Scierie à jantes.............	Orme de 2 ans de coupe.............	1,390
Scie à débillarder...........	Frêne de 3 ans de coupe.............	1,225
Machine à tenons des rais...	Chêne de 2 ans de coupe.............	0,460
— à percer les jantes..	Orme de 2 ans de coupe, trous des rais.	0,258
Id.............	— trous des broches.	0,125
Machine à faire les broches..	Chêne, broches de 0m,034...........	0,390
— à percer le fer......	Fer, trou de 0m,035.................	0,551
Ventilateur donnant le vent à	19 feux faisant 1296 tours en 1'....	2,860
	13 — 1316 tours en 1'....	2,750
	0 — 1596 tours en 1'....	2,360
	0 — 1327 tours en 1'....	1,920

53. *Dynamomètre de rotation à compteur.* — La poulie mobile et la monture des lames de ressort sont tout à fait semblables à celles du dynamomètre à styles. Un anneau à frottement doux et denté en roue d'angle engrène avec un pignon conique dont l'axe rencontre à angle droit celui de l'arbre. L'axe de ce pignon se termine par une vis sans fin, qui conduit une roue dentée, dont l'axe, parallèle à celui de l'appareil, porte à l'autre bout un plateau en cuivre, dont le plan est perpendiculaire à l'arbre. La poulie mobile porte un compteur à roulette semblable à celui qui a été décrit au n° 46, et qui se déplace avec cette poulie d'une quantité proportionnelle à la flexion des lames. Des vis de rappel permettent de placer la roulette au centre du plateau quand l'appareil est au repos.

La théorie et le jeu de cet instrument sont d'ailleurs analogues à ceux du dynamomètre à compteur pour les voitures.

Cet instrument peut facilement être proportionné de manière à totaliser la quantité de travail transmise par un axe de rotation pendant un jour, une semaine, un mois, et sous ce rapport il serait fort utile pour des observations relatives au partage de la force motrice entre divers ateliers ou à la consommation de combustible des machines à vapeur.

54. *Indicateurs de la pression de la vapeur dans les cylindres des machines.*

Indicateur de Watt perfectionné par Mac-Naught. — Il est de la plus grande utilité, pour l'appréciation des effets de la distribution de la vapeur dans l'intérieur des cylindres des machines à vapeur ou de leur état d'entretien, d'avoir un moyen de mesurer la pression de la vapeur aux différents points de la course du piston. Watt s'était déjà occupé de construire pour cet usage un petit instrument, qu'il nomma l'*indicateur de la pression*, et qui a reçu depuis lui divers perfectionnements de détail.

Il se compose d'un piston libre à frottement doux et sans garniture (pl. III, fig. 1), contenu dans un petit cylindre

terminé inférieurement par un bout de tuyau muni d'un robinet et que l'on visse sur le chapeau du cylindre. Lorsque ce robinet est ouvert, la vapeur qui afflue dans le cylindre tend à repousser le piston au dehors; mais la tige de celui-ci étant liée à un ressort en spirale, ce ressort se comprime, et sa flexion sert de mesure à l'effort exercé. On parvient avec du soin à obtenir de ce genre de ressorts des flexions proportionnelles aux efforts, et il ne s'agit plus que d'avoir une trace de ces flexions.

A cet effet, la tige du petit piston porte un bras ou levier à articulation muni d'un crayon que l'on peut mettre en contact avec une feuille de papier enroulée sur un cylindre en cuivre dont l'axe est parallèle à la tige du piston. A la partie inférieure de ce cylindre est pratiquée une gorge dans laquelle s'enroule un fil dont l'extrémité est fixée sur un petit treuil. Le nombre de tours du fil enroulé sur ce treuil a un développement un peu moindre que celui du cylindre; et sur son axe est une poulie qui reçoit plusieurs tours d'un fil dont le développement est égal ou supérieur à la course du piston. En dedans du cylindre est un ressort spiral qui le ramène à sa position primitive, quand le piston revient sur lui-même.

Il résulte de cette disposition que, pendant l'introduction et la détente de la vapeur, le style trace sur la feuille de papier une courbe qui donne l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure; puis que, dans la période d'émission, le cylindre revenant sur lui-même, le style trace une autre courbe qui donne la pression pendant l'échappement, et que cette seconde branche vient à la course suivante se refermer sur la première.

La longueur de papier développée étant proportionnelle à la course du piston, et les ordonnées limitées par les deux courbes étant dans tous les cas proportionnelles aux pressions motrices de la vapeur, il est évident que l'aire des surfaces comprises dans ces courbes fermées représente le travail développé sur le petit piston, et par suite sur le grand.

L'usage et l'application de cet instrument sont faciles, et, quand il est une fois bien taré, il peut donner de bonnes indications; mais il faut remarquer que, si le crayon trace plusieurs courbes successives, elles se confondent ou se superposent de manière à occasionner quelquefois de la confusion. Néanmoins la facilité de son installation doit faire rechercher cet appareil de tous les constructeurs de machines à vapeur.

55. *Nouvel indicateur à style.* — Pour éviter la confusion des courbes (pl. II, fig. 2, 3 et 4), je me suis proposé d'adapter à l'indicateur la disposition que j'avais employée pour les dynamomètres ordinaires.

Au lieu d'agir sur un ressort spiral, le piston de l'instrument porte une tête carrée *d* percée d'une ouverture dans laquelle s'engage l'extrémité d'une lame de ressort parabolique *ee*, fixée par son autre extrémité à un support *f*. La lame a une longueur telle, qu'elle peut prendre d'un côté et de l'autre plusieurs centimètres de flexion, et, comme on peut employer des lames plus ou moins roides, l'instrument peut servir à mesurer des pressions comprises depuis une jusqu'à dix atmosphères. Ainsi, par exemple, pour une machine à haute pression fonctionnant à quatre atmosphères en sus de la pression atmosphérique, chaque atmosphère pourrait correspondre à 10 ou 12 mill. de flexion de la lame, ce qui est d'une précision bien suffisante.

La tête du piston porte en avant de la lame un style *g*, qui trace sur une feuille de papier la courbe des flexions ou des tensions de la vapeur. Un autre style fixe *h*, ajusté de manière à tracer la même ligne droite que le style mobile quand le ressort est au repos, indique le zéro des pressions. Lorsque la vapeur est introduite sur le piston de la machine, elle repousse celui de l'instrument en dehors, et la courbe tracée est au delà de la ligne du zéro; quand au contraire la vapeur se détend et s'échappe, soit dans l'air, soit au condenseur, la courbe se rapproche de la ligne du zéro

ou même la dépasse. Dans tous les cas on a sur la bande de papier une trace de toutes les variations de la pression.

Un troisième style fixe *k* marque à chaque coup un point qui sert à repérer la courbe avec l'origine des courses du piston. Malgré l'avantage que cet indicateur peut avoir, pour des études sur l'effet des machines à vapeur, par la multiplicité et la séparation des courbes qu'il fournit, il faut reconnaître que, pour la pratique ordinaire, l'indicateur de Watt perfectionné, d'une installation plus commode, et plus portatif, est très-suffisant pour constater l'état d'une machine à vapeur. Nous en reparlerons en traitant de ces machines.

On voit que les deux principes sur lesquels sont fondés tous les instruments que nous venons de décrire, savoir : 1° l'emploi d'un style traçant une courbe des efforts sur une feuille de papier mise en mouvement par un moyen direct, et 2° l'usage d'un compteur à roulette pour totaliser la quantité de travail, s'appliquent avec facilité à tous les genres d'observations que l'on peut avoir à faire. En terminant, je rappellerai que l'idée fondamentale de ces deux solutions de la question qui nous occupe m'a été indiquée par M. Poncelet, mon maître et mon ami, et que la part qui me revient dans la construction des instruments n'est relative qu'à la réalisation de cette idée féconde et ingénieuse.

DE LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT PAR LES FORCES.

56. *Observation générale relative aux lois du mouvement.* — Nous avons vu dans les notions de mécanique géométrique quelles étaient les lois des mouvements uniformes et celles des mouvements uniformément accélérés ou uniformément retardés. L'expérience nous a, de plus, montré qu'il existe des mouvements assujettis à ces lois. Ainsi, par exemple, l'on reconnaît, à l'aide des appareils chronométriques divers qui servent à ces observations, que le mouvement de descente des corps de diverses formes dans l'eau ou dans l'air devient promptement uniforme quand ils offrent des surfaces suffisantes pour que la résistance de l'air acquière une intensité convenable.

On a également reconnu que les corps pesants offrant peu de surface tombent vers la surface de la terre d'un mouvement uniformément accéléré.

Après avoir constaté ces faits, il convient d'en déduire les conséquences.

L'on sait (n° 5) que, d'après cette propriété fondamentale de la matière qu'on nomme l'*inertie*, « tout corps persévère dans l'état de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque cause étrangère n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état. »

Si donc un corps est animé d'un mouvement uniforme, c'est qu'il n'est soumis à aucune cause, à aucune force qui puisse changer son état de mouvement, ou que si plusieurs forces le sollicitent à de semblables changements, leurs actions se contre-balancent, se neutralisent, se font *équilibre*.

Newton's First Law of Motion.

Tel est, comme on le conçoit de suite, le cas des parachutes qui descendent dans l'air d'un mouvement uniforme. L'action de la pesanteur et celle de la résistance de l'air se compensent, se détruisent.

57. *Conséquence relative aux causes qui produisent l'accélération ou le retard.* — Dans les mouvements uniformément accélérés ou retardés les accroissements ou les diminutions de la vitesse étant toujours les mêmes pour des temps égaux, la force qui produit cette modification du mouvement est donc constante, puisqu'elle produit des effets constants.

Ainsi, quand l'observation nous aura montré que le mouvement est uniformément accéléré ou retardé, nous serons en droit d'en conclure que la cause, la force qui l'accélère ou le retarde, est constante.

58. *Mouvement vertical des graves ou corps pesants.* — L'expérience prouve que dans le vide tous les corps soumis à l'action de la pesanteur tombent d'une même hauteur dans le même temps, quelle que soit leur densité. Il en résulte que la pesanteur agit de la même manière sur toutes les molécules matérielles. Dans l'air et dans les autres milieux résistants, la résistance que les corps éprouvent dépend de l'étendue et de la forme de leurs surfaces, et elle modifie notablement la nature de leur mouvement, quand les vitesses sont considérables et que les corps ont des volumes très-grands par rapport à leurs poids. Mais pour les corps tels que la pierre, le bois, les métaux, employés dans les constructions, et pour les hauteurs ordinaires de chute, l'influence de la résistance de l'air est assez faible pour qu'on puisse ordinairement la négliger.

Galilée, le premier, en observant les temps employés par des corps roulant sur des plans inclinés ou descendant verticalement, a reconnu que les espaces parcourus dans le sens de la verticale et dans celui de la longueur des plans étaient entre eux comme les carrés des temps employés;

d'où il a conclu que *pour un même lieu à la surface de la terre la pesanteur était uniforme et constante.* C'est donc à l'expérience que l'on doit cette loi importante de la mécanique.

En appliquant à ce cas les lois que nous avons trouvées pour tous les mouvements accélérés ou retardés, nous aurons pour la vitesse communiquée ou détruite après la première seconde, et qu'on désigne ordinairement par la lettre g, $V_1 = g = 9^m,8088$. L'espace parcouru dans le sens de la verticale ou la hauteur se désigne par la lettre H. On aura alors pour les formules du mouvement des graves

$$H = \frac{1}{2} g T^2 = 4^m,9044 T^2;$$

$$T^2 = \frac{H}{4^m,9044}, \quad V^2 = 2gH, \quad V = \sqrt{19,6176 H}.$$

59. *Usage de ces formules.* — La première formule peut servir à déterminer approximativement la hauteur d'une tour, la profondeur d'un puits, par la seule observation de la durée de la chute d'un corps. Si, par exemple, on a trouvé qu'un corps (pour lequel on choisira, s'il s'agit d'un puits, un tison allumé, une lumière) a employé 2″,5 à arriver de la margelle au fond d'un puits, on aura pour sa profondeur

$$H = 4^m,9044 \times (2'',5)^2 = 30^m,65.$$

La troisième est d'un usage fréquent, surtout dans les calculs de jaugeage des dépenses d'eau, et donne la vitesse correspondante à une hauteur de chute connue.

Ainsi pour une hauteur $H = 1^m,20$ on trouve

$$V = \sqrt{19,62 \times 1,20} = 4^m,85.$$

On l'a traduite en tables que l'on trouve dans la plupart des ouvrages de mécanique; mais la règle à calcul supplée ces tables, quand on ne les a pas sous la main. En amenant l'un des indicateurs sous le nombre 19,62, lu à l'échelle

Uniform Motion.

If S be the space. v the velocity, t the time.

$$S = vt.$$

Let v be the velocity expressed in feet then v is the number of feet described in a second. and since the motion is uniform. $2v$ is the space described in 2 seconds. therefore generally if S be the space.

$$S = vt. \therefore v = \frac{S}{t}$$

Uniformly accelerated motion

If F be the accelerating force. t the time from the begining of the motion, v the velocity at the time t.

$$v = ft.$$

Let F be the accelerating force then F is the velocity generated in one second (since a force is measured by the velocity it generates in a unit of time.) now since the force is uniform F will be the velocity added in the next second and $2F$ the velocity at the end of 2 seconds &c. &c. therefore generally, at the end of T seconds. If V be the velocity at the end of that period of time

$$V = FT \therefore F = \frac{V}{T}$$

$$= \frac{\text{velocity generated in an}}{\text{time}}.$$

To find the relations of the space, time, and Force when a body moves from rest under the action of a uniformly accelerating force —.

During the time t the velocity of a body acted on by a force F begins from zero and increases incessantly up to a certain finite magnitude v... It is manifest that the space described in any portion of the time with this increasing velocity is greater than the space which would have been described in the same portion of time, if the velocity had been, during the whole portion the same as it is at the beginning of that portion. and similarly the space described in any portion of the time is less than the space which would have been described in the same portion of time if the velocity had been during the whole portion, ~~that~~ great as it is at the end of that portion.. Let T be divided into n equal intervals each $= \frac{T}{n}$. the velocities at the end of the times

$$\frac{T}{n},\ \frac{2T}{n},\ \frac{3T}{n},\ \frac{4T}{n}\ \&c\ ..\ \frac{(n-1)T}{n}$$

will be respectively

$$\therefore,\ F\frac{T}{n}.\ F\frac{2T}{n}.\ F\frac{3T}{n}\ F\frac{4T}{n}\ \&c\ ..\ F\frac{\overline{n-1}T}{n}.\ F\frac{nT}{n}$$

at the beginning of the times $\frac{T}{n}.\ \frac{2T}{n}$ &c.

the velocities will be

$$0.\ F\frac{T}{n}.\ F\frac{2T}{n}.\ F\frac{3T}{n}.\ F\frac{4T}{n}..\&c.\ldots F\frac{\overline{n-1}T}{n}$$

supérieure, on trouve à l'échelle inférieure les vitesses correspondantes à toutes les hauteurs lues sur la réglette, ou réciproquement, en lisant les vitesses à l'échelle inférieure, on trouve sur la réglette les hauteurs correspondantes.

60. *Chute successive des corps pesants.* — Les lois du mouvement de descente des corps pesants servent à expliquer entre autres phénomènes celui de la séparation croissante des corps, des gouttes d'eau, par exemple, qui, élevées ensemble et avec contiguïté dans un jet d'eau, redescendent en pluie par gouttelettes séparées. En effet, il est facile de faire voir que, les gouttes partant du sommet de la courbe l'une après l'autre, elles doivent se séparer de plus en plus. Supposons, en effet, qu'une goutte d'eau commence son mouvement de descente 0″,01 avant la suivante : 1″,00 après le départ de la deuxième la première goutte sera descendue pendant 1″,01 et aura parcouru une hauteur

$$H = 4^{m},9044 \times (1,01)^2 = 5^{m},003,$$

tandis que la suivante, qui ne sera en mouvement que depuis 1″,00, ne sera descendue que de

$$H = 4^{m},9044 \times 1''^2 = 4,904.$$

Donc déjà la première sera en avance sur la seconde de

$$5^{m},003 - 4^{m},904 = 0^{m},099,$$

et, la séparation allant toujours en croissant, le jet retombera en pluie.

61. *Principe de la proportionnalité des forces aux vitesses.* — L'observation des faits montre et l'on sent qu'il est naturel d'admettre que *les forces sont réellement proportionnelles aux degrés de vitesse qu'elles impriment dans des temps égaux infiniment petits à un même corps qui cède librement à leur action et dans le sens propre de cette action.* C'est là un de ces axiomes fondamentaux admis par tous les géomètres, et

qui ne se démontrent que par l'exactitude des conséquences que l'on en tire.

Si donc on nomme F et F' deux forces qui, en agissant successivement sur un même corps, lui impriment ou lui enlèvent des degrés de vitesse infiniment petits v et v' dans l'élément de temps t, on aura, d'après ce principe, la proportion

$$F : F' :: v : v'.$$

Pour avoir l'expression et la mesure de la force F, nous pouvons la comparer à une autre force dont l'effet sur le même corps soit connu, à la pesanteur, par exemple, et comme nous savons que la vitesse communiquée aux graves dans l'élément de temps est $v' = gt$, et que nous désignons par P, le poids du corps ou la force exercée par la pesanteur, la proportion ci-dessus devient alors

$$F : P :: v : gt;$$

d'où

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v}{t}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que le même principe appliqué aux actions que la pesanteur exerce sur un même corps en des lieux différents, où le poids de ce corps est respectivement P et P', nous donne la proportion

$$P : P' :: gt : g't :: g : g'.$$

D'où il suit que le rapport $\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}$ est constant pour tous les lieux de la terre. C'est, en effet, ce que l'observation a démontré.

Ce rapport constant du poids d'un corps à la vitesse que la pesanteur lui communique dans la première seconde de son action est ce que l'on nomme *la masse*, et se désigne par la lettre M.

62. *Mesure des forces motrices et d'inertie.* — On a donc pour l'expression de la force F, capable de communiquer

Now if the body moved uniformly during each interval of time $\left(\frac{T}{n}\right)$ with the velocity it had at the beginning of the interval. from the expression for uniform motion $S = vt$ we should have the whole space (S) equal to the sum of the series.

$$0 + f\frac{T^2}{n^2} + f\frac{2T^2}{n^2} + f\frac{3T^2}{n^2} + \&c. + f\frac{\overline{n-1}\,T^2}{n^2} = f\frac{T^2}{n^2}(1+2+3+n.+n-$$

$$= f\frac{T^2}{n^2}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right] = f\frac{T^2}{2} - f\frac{T^2}{2n}$$

If the body had moved uniformly during each interval of time $\left(\frac{T}{n}\right)$ with the velocity it had at the end of the interval. we should have (S) the sum of the series

$$f\frac{T^2}{n^2} + f\frac{2T^2}{n^2} + f\frac{3T^2}{n^2} + \&c. + f\frac{\overline{n-1}\,T^2}{n^2} + f\frac{nT^2}{n^2} = f\frac{T^2}{n^2}(1+2+3+n..+n$$

$$= f\frac{T^2}{n^2}\left(\frac{n\,\overline{n+1}}{2}\right) = f\frac{T^2}{2} + f\frac{T^2}{2n}$$

Since the velocity is continually accelerated the true value will be between these two quantities however small each interval may be. or however great n may be. but when n becomes indefinitely great the last terms in each of the above expressions vanish, and we have therefore.

$$S = \frac{1}{2}fT^2 \quad . \quad S \propto T^2$$

Between the two equations $S = \frac{1}{2}fT^2$ and $v = fT$ we may eliminate either f or T. and thus obtain $v^2 = 2fS$, $S = \frac{1}{2}vT$. the expression $S = \frac{1}{2}vT$ shows us that the space described

from rest by the action of a uniform accelerating force is one half of the space which would have been described in the same time if the velocity had been constant and equal to its value at the end of the time ..

If $T = 1$ in the expression $S = \frac{1}{2} f T^2$

$f = 2S$ or f is twice the space described in a unit of time ..

ou d'enlever au corps de poids P ou de masse M un élément de vitesse v dans l'élément de temps t

$$F=\frac{P}{g}.\frac{v}{t}=M.\frac{v}{t}.$$

On voit par cette expression que, toutes les fois que le poids du corps ou sa masse sera donné, on aura la valeur, la mesure de la force en kilogrammes, quand on connaîtra le rapport $\frac{v}{t}$. Si, par exemple, ce rapport est constant, ce qui arrive dans le mouvement uniformément accéléré ou retardé, la force F est constante.

Mais, puisque, pour communiquer à un corps de poids P une variation de vitesse v dans l'élément de temps t, il faut développer un effort $\frac{P}{g}\frac{v}{t}$, il y a donc à vaincre une résistance dont cet effort est la mesure.

Cette résistance c'est la force d'inertie, la réaction qui se développe toutes les fois qu'une variation dans le mouvement se produit. Ainsi l'expression précédente sera à la fois la mesure de la force motrice qui produit la variation du mouvement, et celle de la force avec laquelle le corps, en vertu de son inertie, s'oppose, résiste à cette variation.

L'examen de la formule $F=\frac{P}{g}\frac{v}{t}$ montre que, pour un poids P ou une masse donnée M, la grandeur, l'intensité de la force F, croîtra d'autant plus que la variation du mouvement sera plus rapide, ou le rapport $\frac{v}{t}$ plus grand. C'est ce qui explique la grandeur des efforts et des réactions qui se développent dans les transmissions rapides du mouvement, dans les chocs qui s'accomplissent entre des corps durs, dans des intervalles de temps très-courts, où la vitesse varie ou s'éteint si promptement.

Ce rapport $\frac{v}{t}$ de l'accroissement ou de la diminution de la vitesse dans l'élément du temps pendant lequel cette varia-

tion se produit, est ce que depuis quelques années les géomètres nomment l'*accélération.*

Ainsi, dans le cas où il s'agit de l'action de la gravité, l'accélération constante qu'elle produit est représentée par le nombre $g = \frac{v'}{t}$.

Il suit de cette définition et du principe général précédent, que la force qui produit une variation élémentaire dans le mouvement d'un corps, est proportionnelle au poids P de ce corps ou à sa masse $\frac{P}{g}$, et à l'*accélération* $\frac{v}{t}$ qu'elle produit.

On peut rendre sensible l'accroissement de l'effort à exercer F, avec la rapidité de communication du mouvement au moyen d'un peson ou de tout autre ressort dont la flexion, indiquée par un style ou un curseur, est d'autant plus grande que la transmission du mouvement est plus rapide. Si, par exemple, on suspend au peson un poids de 5 kilogr., auquel cas un curseur en carte placé contre la branche supérieure s'arrêtera à la cinquième division, et qu'ensuite on élève le peson et le poids d'un mouvement accéléré, le ressort fléchira davantage, et d'autant plus que l'accélération sera plus rapide. L'accroissement de flexion indiqué par le déplacement du curseur mesurera l'effort, la résistance opposée par l'inertie à l'accélération du mouvement.

63. *Cas où la force est constante.* — Si la force F, ou si le rapport $\frac{v}{t}$ est constant, on a alors au bout d'un temps quelconque T, et quand la force a communiqué ou détruit une vitesse V, l'égalité

$$\frac{v}{t} = \frac{V}{T}, \quad \text{et par suite} \quad F = M\frac{V}{T} = M\frac{v}{t};$$

d'où

$$FT = MV \quad \text{et} \quad Ft = Mv.$$

64. *Relation des forces aux accélérations.* — Si deux forces F et F' agissent successivement sur un même corps, et lui

variable motion -

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{V}{T} \quad \text{and} \quad F' = \frac{P'}{g} \cdot \frac{V'}{T'}$$

$$\frac{Ft}{F't'} = \frac{MV}{M'V'}, \quad \therefore Ft : F't' :: Mv : M'v'$$

communiquent des accélérations différentes $\frac{v}{t}$ et $\frac{v'}{t'}$, on voit qu'elles seront proportionnelles à ces accélérations, et que l'on aura

$$F : F' :: \frac{v}{t} : \frac{v'}{t'}.$$

C'est par suite de cette proportionnalité que l'on prend quelquefois les *accélérations* $\frac{v}{t}$ pour la mesure des forces. Mais ces quantités ne sauraient être une mesure exacte des forces, attendu qu'elles n'expriment qu'un rapport.

Ainsi, quand on dit d'une manière absolue et sans autre explication que la quantité g, qui exprime l'accélération produite par la pesanteur, est la mesure de cette force, on donne aux élèves une notion inexacte, attendu que g n'est en réalité que la vitesse communiquée ou enlevée au corps par la pesanteur, pendant chaque seconde de son action, et qu'une vitesse qui s'exprime en mètres ne peut mesurer une force qui doit être comparée au kilogramme.

63. *De la quantité du mouvement.* — Les produits MV, Mv, égaux à $\frac{P}{g}V$ ou $\frac{P}{g}v$, ont reçu le nom de *quantité de mouvement;* c'est une expression de convention à laquelle il ne faut attacher d'autre sens que celui du produit d'une masse par la vitesse qui lui a été communiquée ou enlevée.

On remarquera d'ailleurs que ce produit MV, Mv, est égal à celui FT et Ft de la force par le temps pendant lequel elle a agi. Si l'on considère deux forces F et F' agissant pendant des temps différents sur deux corps de masses inégales, on aura

$$Ft = Mv, \quad F't' = M'v';$$

et par suite

$$Ft : F't' :: Mv : M'v'.$$

D'où il résulte que les quantités de mouvement Mv, M'v', communiquées ou enlevées à des corps différents dans des temps inégaux, sont entre elles comme le produit des

forces auxquelles elles sont dues par les temps pendant lesquels ces forces ont agi.

Ce n'est que quand les temps sont égaux que les quantités de mouvements imprimées ou détruites sont proportionnelles aux forces et peuvent leur servir de mesure.

Il suit aussi de ce qui précède, comme on va l'expliquer au numéro suivant, que dans le choc il n'y a pas de perte de quantité de mouvement, ce que l'on exprime en disant qu'il y a *conservation* des quantités de mouvement. Mais nous verrons plus loin que les chocs donnent toujours lieu à une perte de travail.

66. *Forces égales agissant pendant des temps égaux.* — Si les forces sont égales et agissent pendant le même temps, les quantités de mouvement communiquées ou détruites dans les deux corps de masse M et M' sont égales. C'est ce qui arrive dans la réaction de deux corps qui se pressent, se poussent ou se choquent. Les efforts de compression et de résistance étant égaux, opposés et développés pendant le même temps, il s'ensuit que la quantité de mouvement communiquée dans cette réaction à l'un des corps est égale à celle qui a été perdue par l'autre. C'est là une conséquence fondamentale pour la théorie du choc des corps.

Ainsi, par exemple, lorsqu'un corps dont la masse est M, animé d'une vitesse V, vient rencontrer un corps de masse M', animé d'une vitesse V', selon la même ligne dirigée soit dans le même sens, soit en sens contraire, il se développe aux points de contact des efforts de compression égaux et opposés qui, dans un élément de temps t, enlèvent au corps choquant M un petit degré de vitesse v, et par suite une quantité de mouvement Mv, et communiquent au corps choqué M', s'il marche dans le même sens que le premier, un accroissement de vitesse v' et une quantité de mouvement $M'v'$. Ces quantités étant égales, on a donc à chaque instant du choc ou de la compression réciproque des corps,

$$Mv = M'v'.$$

If $FT = F'T'$ then $MV = M'V'$

Let m, m' be the masses of two bodies. v, v' their velocities at the very commencement of their contact. That is to say, at the first instant of Impact. The signs v. and v'. will be the same or opposite. according as the two bodies proceed in the same or contrary directions. Whatever be the degree of hardness of the two bodies they are always more or less compressible. Therefore, because the bodies move with different velocities v. and v'. one of them must impinge on. and consequently compress the other. and during this compression. the velocity of one of the bodies, of m, for example, will diminish by infinitely small degrees while that of m' will increase in the same manner. until these two velocities become equal. — ..

Poisson Mechanics. Vol. II. pag 21.

Dans ce cas l'un des corps perd une quantité de mouvement égale à celle que l'autre gagne, et la somme de leurs deux quantités de mouvement reste la même.

Pareille chose se passant à chaque instant du choc, il s'ensuit encore que la quantité de mouvement totale perdue par l'un des corps est égale à celle que l'autre a gagnée pendant la compression, et qu'à la fin de cette période la somme de leurs quantités de mouvement est la même après le choc qu'avant.

Cette conséquence constitue le principe *de la conservation des quantités de mouvement* autrement appelé *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.*

S'il s'agit de corps mous ou dont l'élasticité soit complétement altérée par le choc, et qui après la compression restent réunis en marchant ensemble d'une vitesse commune U, la quantité de mouvement après le choc est $(M+M')U$, et d'après ce qui précède on doit avoir

$$MV+M'V'=(M+M')U.$$

D'où l'on tire pour la vitesse commune après le choc

$$U=\frac{MV+M'V'}{M+M'}.$$

Si le corps choqué était au repos, on aurait $V'=0$, et l'expression ci dessus se réduirait à

$$U=\frac{MV}{M+M'}.$$

Si dans la première de ces deux expressions on divise les deux termes de la fraction par la masse M' du corps choqué, la vitesse commune après le choc devient

$$\frac{\frac{M}{M'}V+V'}{\frac{M}{M'}+1}.$$

Sous cette forme on voit que la vitesse commune du mouvement des deux corps mous après le choc différera d'autant moins de la vitesse V' du corps choqué que la masse M du corps choquant sera plus petite par rapport à celle du corps choqué. A la limite de petitesse ou quand le corps choquant est infiniment petit par rapport au corps choqué, le rapport $\frac{M}{M'}$ s'évanouit, et l'on a $U = V'$, c'est-à-dire que la vitesse de la masse choquée n'est pas altérée. Ce cas se présente dans le mouvement des liquides et des fluides élastiques, lorsque des tranches infiniment minces viennent successivement choquer des masses finies animées dans le même sens de vitesses plus petites.

Si les corps marchent à la rencontre l'un de l'autre, les choses se passent encore d'une manière analogue, mais alors à la fin de la compression, ou les corps sont tous deux réduits au repos, et l'on a

$$MV = M'V' \quad \text{et} \quad U = 0,$$

ou l'un des deux rétrograde, et ils marchent avec une vitesse commune U. Si c'est, par exemple, le corps M' qui rétrograde, la quantité de mouvement qui a été perdue par le corps M est $M(V-U)$, et la quantité de mouvement développé pendant la durée de la compression par les forces de réaction sur le corps M' se compose de celle qui a été détruite et qui est $M'V'$, plus celle qui lui a été communiquée en sens contraire $M'U$, et puisque les quantités de mouvement développées de part et d'autre sur chacun des corps doivent être égales, on a

$$M(V-U) = M'(V'+U),$$

d'où l'on tire pour la vitesse commune après le choc ou la compression

$$U = \frac{MV - M'V'}{M + M'},$$

The greater M' or the less M. the smaller the fraction $\frac{M}{M'}$,

$$MV - M'V' = 0 \quad \therefore MV = M'V'$$

$F \propto M$. FE or $H \propto V^2$.

formule dans laquelle on voit encore, en divisant haut et bas par la masse M du corps choquant, ce qui donne

$$U=\frac{V-\frac{M'}{M}V'}{1+\frac{M'}{M}},$$

que la vitesse du corps choquant sera d'autant moins altérée par le choc que sa masse M sera plus grande par rapport à celle du corps choqué M'.

Ce qui montre que, dans les machines qui doivent procéder par des chocs, il faut augmenter le poids, la masse des pièces choquantes par rapport aux pièces choquées, dans un rapport d'autant plus grand que l'on désire conserver au mouvement une plus grande régularité.

Si le corps choqué est au repos, tel qu'un pilot battu par un mouton, l'on a $V'=0$, et la vitesse commune avec laquelle le mouton et le pilot tendent à descendre après le choc est

$$U=\frac{MV}{M+M'}=\frac{1}{1+\frac{M'}{M}}V.$$

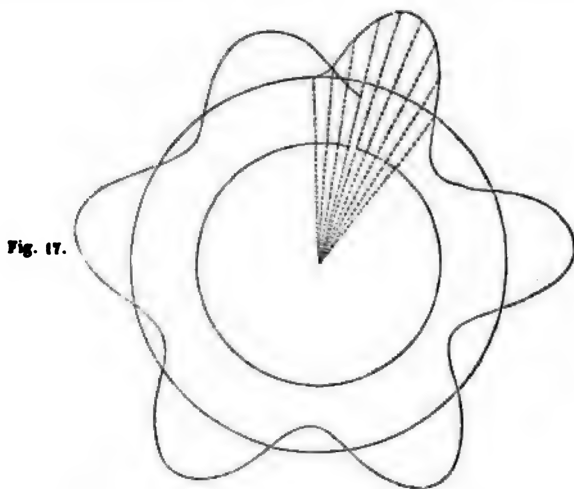
Ce qui montre que cette vitesse différera d'autant moins de celle d'arrivée du mouton sur la tête du pilot, que la masse M du mouton sera plus grande par rapport à celle du pilot.

Il convient donc dans ce cas d'augmenter la masse du mouton plutôt que sa vitesse, car le travail employé pour l'élever ne croît que comme son poids, tandis qu'il augmente proportionnellement à la hauteur d'élévation, ou au carré de la vitesse de chute.

67. *Vérification des considérations précédentes par des expériences directes.* — Les résultats que l'on vient d'indiquer relativement au choc des corps mous ont été vérifiés par des expériences directes que j'ai exécutées à Metz

en 1833 (*), avec l'appareil suivant : Une caisse A en bois (pl. III, fig. 7), dans laquelle on a placé successivement de la terre glaise plus ou moins molle, du sable, des pièces de bois, etc., était suspendue à un dynamomètre à style et à plateau tournant. Le plateau était animé d'un mouvement uniforme qui lui était transmis par un poids et régularisé par un volant à ailettes. Lorsque la caisse était immobile, la résistance du dynamomètre faisait équilibre à son poids, et la courbe de flexion tracée par le style sur le plateau était un cercle.

Le corps choquant était un boulet suspendu à une espèce de tenaille qui s'ouvrait à volonté, et lorsqu'il atteignait les matières placées dans la caisse il en résultait des compressions à la suite desquelles les deux corps marchaient ensem-


Fig. 17.

ble d'une vitesse commune. Les amplitudes de ce mouvement étaient mesurées et indiquées par les flexions des ressorts, et il en résultait sur le plateau une courbe dont les distances

* Nouvelles expériences sur le frottement, sur la transmission du mouvement par le choc, etc., faites à Metz en 1833, par A. Morin, capitaine d'artillerie.

à l'axe ou les rayons vecteurs allaient en croissant pendant toute la période de la compression où le mouvement s'accélérait, d'où résultait que la courbe était d'abord convexe vers le cercle du repos. Puis, à partir de l'instant où la compression avait atteint son maximum, les corps étant mous ou à peu près, il en résultait que, la caisse cessant d'être sollicitée par un effort croissant, la réaction du ressort commençait à ralentir le mouvement de descente, l'arrêtait, relevait ensuite la caisse au-dessus de sa position initiale, et lui faisait alors continuer une suite d'oscillations verticales qui ne s'éteignaient que par l'effet des résistances passives de l'appareil.

Le relèvement de ces courbes et leur transformation en d'autres courbes dont les abscisses étaient les temps proportionnels aux angles décrits, et les ordonnées les espaces verticaux parcourus par la caisse, étaient très-faciles et se trouvent reproduits dans la figure.

La courbe du mouvement étant d'abord convexe, puis concave vers l'axe des abscisses, ce qui indiquait que le mouvement était d'abord accéléré, puis retardé (nos 11 et 12), il est d'ailleurs évident que la vitesse, qui est donnée par l'inclinaison des tangentes sur l'axe des abscisses atteint sa plus grande valeur au point d'inflexion, et le tracé permettait de déterminer cette valeur maximum correspondante à la fin de la compression ou du choc pour chaque expérience.

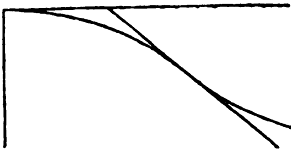


Fig. 18.

On avait donc d'abord, comme donnée, la masse M du corps choquant, sa vitesse d'arrivée sur le corps choqué, due à la hauteur de chute, la masse M' du corps choqué, dont la vitesse initiale V' était nulle, et, par l'observation, la vitesse commune avec laquelle les deux corps marchaient après le choc.

Il était donc facile de comparer dans chaque cas les résul-

tats de l'expérience à ceux de la théorie. Quelques-unes de ces comparaisons sont reproduites ici.

Expériences sur la transmission du mouvement par le choc d'un projectile sphérique tombant sur une caisse remplie de terre glaise ou contenant des pièces de bois.

POIDS DE LA CAISSE et de sa suspension P.	POIDS DE LA SPHÈRE p.	POIDS TOTAL P+p.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	VITESSE due à la hauteur de chute.	VITESSE communiquée à la caisse d'après la théorie.	VITESSE communiquée à la caisse d'après l'expérience.	DURÉE APPROXIMATIVE de la transmission du mouvement.	
Choc sur la terre glaise.								
kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	m.	sec.	
60,235	6,000	66,235	0,40	2,801	0,268	0,260	0,012	Expériences faites avec de l'argile dont la résistance à la pénétration des projectiles à faible vitesse était de 29 677 kil. par mètre carré.
61,095		67,095	0,50	3,135	0,280	0,285	0,020	
			0,20	1,981	0,330	0,330	0,019	
60,235	11,988	72,223	0,30	2,426	0,403	0,400	0,021	
			0,40	2,801	0,465	0,462	0,024	
60,235	20,280	80,515	0,20	1,981	0,499	0,490	0,020	
67,025	6,000	73,025	0,20	1,981	0,163	0,165	0,063	Expériences faites avec de l'argile dont la résist. à la pénétration était de 1689 kil. par m.c.
67,025	20,280	87,305	0,20	1,981	0,460	0,440	0,072	
Choc sur du bois.								
21,950	11,988	33,938	0,20	1,981	0,694	0,660	0,0075	
21,950	11,988	33,938	0,30	2,426	0,850	0.840	0,0074	
21,950	20,280	42,230	0,10	1,400	0,672	0,690	0,0080	

On voit par les résultats consignés dans ce tableau que les vitesses sont, autant qu'on peut le vérifier avec de semblables moyens, les mêmes que celles que l'on déduit des considérations théoriques précédentes.

Débandement. Reflexion.

68. *Choc de deux corps élastiques.* — Si l'on suppose que les deux corps que l'on vient de considérer soient parfaitement élastiques, les effets de la compression seront d'abord les mêmes que dans le cas précédent, et à la fin de cette période le corps M aura perdu la vitesse V—U ou la quantité de mouvement M(V—U) et le corps M' aura gagné la quantité de mouvement M'(U—V'), et, ces quantités devant être égales, on aura encore pour la vitesse commune à la fin de la compression

$$U=\frac{MV+M'V'}{M+M'}.$$

Mais après l'instant de la plus grande compression les corps élastiques reviennent à leur forme primitive, et dans leur retour les ressorts moléculaires développent, si l'élasticité est parfaite, des efforts égaux à leur résistance à la compression, et par conséquent détruisent ou communiquent des quantités de mouvement égales à celles qu'ils avaient précédemment détruites ou communiquées. Il suit de là que dans ce débandement des ressorts moléculaires le corps M perdra encore une vitesse égale à V—U, et que sa vitesse finale sera

$$V-2(V-U)=2U-V,$$

et que le corps M' recevra un nouvel accroissement de vitesse égale à U—V'; et aura ainsi une vitesse finale égale à

$$V'+2(U-V')=2U-V'.$$

Si le corps M' était au repos à l'origine, en le supposant parfaitement élastique, il recevrait donc une vitesse

$$2U=\frac{2MV}{M+M'},$$

c'est-à-dire double de celle qui eût été communiquée à un corps mou dans les mêmes circonstances.

69. *Observations sur les résultats précédents.* — Les raisonnements qui précèdent, relativement aux corps mous ou

élastiques, supposent qu'il existe des corps dénués de toute élasticité et d'autres doués d'une élasticité parfaite. Or, ni l'une ni l'autre de ces hypothèses n'est exacte, et, selon les circonstances dans lesquelles il est placé, un corps peut se comporter comme s'il était dénué de toute élasticité ou comme s'il possédait une élasticité partielle. De même tel corps qui se comporte dans certains cas et sous certains rapports comme s'il était parfaitement élastique ne le paraîtra plus que partiellement dans d'autres cas.

J'en citerai comme exemples les résultats de quelques expériences analogues aux précédentes et qui ont été exécutées en plaçant au fond de la caisse mobile une plaque de fonte sur laquelle tombait le corps sphérique choquant.

Expériences sur la transmission du mouvement par le choc d'un projectile sphérique tombant sur une plaque de fonte.

POIDS DE LA CAISSE et de sa suspension P.	POIDS de la sphère de fonte p.	POIDS TOTAL P + p.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	VITESSE due à cette hauteur.	VITESSE communiquée à la caisse d'après la théorie 2U.	d'après l'expérience.	DURÉE APPROXIMATIVE de la transmission.
kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	m.	sec.
61,215	6,000	67,215	0,40	2,801	0,500	0,500	0,0085
61,215	6,000	67,215	0,50	3,135	0,560	0,570	0,8100
61,215	6,000	67,215	0,60	3,433	0,633	0,626	0,0080
61,215	11,988	73,203	0,40	2,801	0,917	0,910	0,0065
61,215	11,988	73,203	0,50	3,135	1,026	1,050	0,0075

Les résultats consignés dans ce tableau montrent que la plaque de fonte choquée s'est comportée comme un corps parfaitement élastique. Mais il y a lieu de faire néanmoins ici quelques remarques importantes.

$$F = \frac{MV}{T}$$

when $T = 0$. $F = \infty$.

Le projectile, qui, s'il avait agi comme un corps parfaitement élastique, ainsi que les parties de la plaque avec lesquelles il se trouvait en contact immédiat, aurait dû remonter de la hauteur correspondante à la vitesse $2U-V$, ne revenait pas à beaucoup près aussi haut. Cela prouve que l'intensité du choc dans ces expériences avait altéré en grande partie l'élasticité des ressorts moléculaires des parties en contact, tandis que l'élasticité de flexion ou de forme générale de la plaque n'avait pas été altérée. On voit par là que, bien que les corps doués d'une certaine élasticité reprennent en apparence leur forme primitive, il y a dans presque tous les cas une perte notable de travail produite par le choc, par suite de l'altération plus ou moins complète de l'élasticité. C'est ce que l'on verra plus loin d'une manière plus explicite au (n° 98).

70. *Quantité de mouvement communiquée par une force constante.* — Lorsque la force est constante, on a $FT=MV$, d'où $F=\frac{MV}{V}$. Cette expression montre que l'effort nécessaire pour imprimer ou détruire une quantité de mouvement donnée MV est d'autant plus grand que le temps employé est plus court, et comme l'action réciproque des corps est d'autant plus rapide que les chemins parcourus, que les compressions, les flexions, les pénétrations, sont moindres pour une même quantité de mouvement détruite, cela explique comment le choc des corps durs, la transmission ou la destruction des mouvements par des corps peu flexibles, compressibles ou extensibles, donnent lieu à de si grands efforts, et par conséquent à des ruptures, à des accidents, et comment à l'inverse l'interposition de corps mous, compressibles, diminue de beaucoup l'intensité des efforts et leurs conséquences.

On voit de plus par l'expression $F=\frac{MV}{T}$ qu'une vitesse finie V ne pourrait être communiquée dans un temps nul à une masse M que par un effort infini, ce qui montre la

fausseté de cette hypothèse, trop explicitement admise quelquefois dans l'enseignement de la mécanique rationnelle, de la transmission instantanée du mouvement par des forces auxquelles on est obligé de donner alors un nom et de supposer une nature spéciale en les appelant *forces de percussion.* Rien de semblable ne se passe réellement dans la nature aussi instantanément : les quantités de mouvement ne sont transmises et détruites que dans des temps plus ou moins longs, parfois imperceptibles à nos sens et à nos moyens d'observation, mais jamais nuls. La notion des forces de percussion est donc fausse par elle-même, si on l'entend comme nous venons de l'indiquer.

Des exemples rendront plus sensible ce que nous venons de dire.

S'il s'agit de la quantité de mouvement communiquée à un boulet de 24 pesant 12 kilogr. et auquel la poudre imprime une vitesse de 500^m en $1''$, on a

$$M = \frac{P}{g} = \frac{12^k}{9,81} = 1,223, \quad V = 500^m;$$

$$FT = 1,223 \times 500 = 611,5.$$

Si l'on suppose successivement

$$T = 1'',00,\ 0'',50,\ 0'',10,\ 0'',01,$$

on a $$F = 611^k,5,\ 1223^k,\ 6115^k,\ 61\,150^k.$$

Cette vitesse étant communiquée dans moins de $\frac{1}{100}$ de seconde, cela donne une idée des efforts énormes développés par la poudre, quoique nous n'ayons considéré qu'un effort moyen constant, et par conséquent bien inférieur à la valeur maximum de l'effort réel.

Lorsque les chevaux d'une diligence pesant 4500 kilogrammes la mettent en mouvement pour lui imprimer une vitesse de 10 000 mètres à l'heure, ou

$$\frac{10\,000^m}{3600''} = 2^m,777 \text{ en } 1'',$$

pide du mouvement à employer dans les machines doivent être disposés ou proportionnés d'après ces notions.

Les jongleurs, les clowns, les hercules, dans leurs tours d'adresse ou de force, sont conduits par l'observation à des pratiques conformes à ce que nous venons d'indiquer, et l'on ne les voit jamais soulever, lancer ou arrêter des masses un peu lourdes ou faire leurs sauts d'une manière brusque, mais toujours graduellement, en augmentant la durée des efforts et les chemins parcourus, afin de diminuer les efforts.

71. *Observation sur l'emploi de la quantité de mouvement.* — Lorsque l'on connaît le produit de la masse du corps et de la vitesse qui lui a été communiquée ou enlevée, l'on a une mesure de l'effet produit par la force pendant la durée de son action; mais on voit que cette mesure ne peut être prise pour terme de comparaison que pour les cas analogues où des vitesses sont réellement communiquées ou détruites par la force, et il ne s'ensuit pas que le produit FT de la force par la durée de son action, égal, quand il y a changement dans l'état de mouvement, à la quantité de mouvement communiquée ou détruite, puisse servir toujours de mesure à l'effet des forces, comme on l'a quelquefois admis pour quelques instruments et dans certains ouvrages. En effet, il est facile de voir qu'un effort pourrait durer fort longtemps sans produire d'effet mécanique. Ainsi les chevaux qui tirent sur une voiture embourbée sans la faire avancer développent des efforts considérables, qui, multipliés par la durée de leur action, donneraient un produit énorme, sans cependant qu'il en résulte aucun effet utile, aucun travail mécanique, et rien autre chose que la fatigue et l'épuisement du moteur animé.

Prenons pour autre exemple le tirage d'une charrue, qui, dans une terre très-forte, exige un effort moyen total de 360 kilogrammes. Admettons que, le sillon ayant 120 mètres de longueur, les chevaux mettent dans un cas 100″ et dans

OBSERVATION DES LOIS DU MOUVEMENT.

73. *Détermination de l'intensité des forces par l'observation de la loi des mouvements qu'elles produisent.* — La formule

$$F=\frac{P}{g}\cdot\frac{v}{t}$$

montre que, si par l'observation de la loi du mouvement on connaissait pour chaque instant la valeur du rapport $\frac{v}{t}$, on aurait celle de l'effort F correspondant. Si, par exemple, l'expérience apprend que le mouvement est uniformément accéléré, on a

$$E=\frac{1}{2}V_1T^2,$$

d'où $$V_1=\frac{V}{T}=\frac{v}{t}=\frac{2E}{T^2}.$$

Par conséquent $$F=\frac{P}{g}\cdot\frac{2E}{T^2}.$$

S'il s'agit, je suppose, d'un traîneau pesant 1000 kilogrammes, et qui parcoure d'un mouvement uniformément accéléré un espace de 10 mètres en 2″, on a

$$F=\frac{1000}{9,81}\times\frac{2\times 10}{4}=102\times 5=510 \text{ kilogrammes}$$

pour la valeur de la force capable de lui communiquer ce mouvement accéléré, abstraction faite du frottement.

74. *Moyens employés pour déterminer les lois du mouvement des corps.* — On se sert, selon les cas, de différents appareils ou instruments pour observer les lois du mouvement des corps. Quand ils marchent lentement, on emploie des mon-

$$S = \frac{1}{2} f t^2.$$

$$f = \frac{v}{t}$$

tres, des pendules, et on note les temps correspondant à des espaces donnés. Mais ce moyen ne fournit que quelques valeurs correspondantes du temps et des espaces, et ne peut être mis en usage avec précision pour les mouvements rapides.

75. *Appareil du colonel Beaufoy* (pl. III, fig. 5). — Cet expérimentateur s'est servi, dans ses recherches sur la résistance de l'eau, d'un pendule qui traçait à chaque oscillation une marque sur une règle dont le mouvement était dans un rapport connu avec celui qu'il voulait observer, et comme dans ses expériences le mouvement devenait bientôt uniforme, il obtenait facilement la vitesse de ce mouvement.

76. *Appareil d'Eytelwein.* — Ce savant ingénieur prussien paraît être le premier qui ait eu l'idée de combiner un mouvement uniforme connu avec un mouvement à déterminer, de manière à obtenir une trace de ces mouvements simultanés dont il pût déduire les circonstances du mouvement inconnu.

Pour ses expériences sur le bélier hydraulique il s'est servi d'une bande de papier sans fin (pl. III, fig. 6 et 7), enroulée sur deux cylindres, et à laquelle on communiquait à la main un mouvement régulier. Les longueurs de papier passées étaient donc à peu près proportionnelles au temps. Un style fixé à la tige des soupapes du bélier traçait sur cette bande une courbe dont les ordonnées étaient les espaces parcourus. M. Eytelwein a pu, à l'aide de cet appareil imparfait, determiner à peu près les intervalles de temps pendant lesquels les soupapes du bélier hydraulique étaient ouvertes ou fermées. Mais on conçoit que le mouvement communiqué à la main ne pouvait être uniforme, et que ce dispositif ne saurait donner de résultats bien exacts.

77. *Nouveaux appareils.* — Pour les expériences exécutées à Metz sur le frottement et pour d'autres recherches, M. Pon-

celet m'a indiqué et j'ai employé la combinaison d'un mouvement uniforme connu avec le mouvement dont je voulais déterminer la loi. J'ai depuis modifié la disposition de ces appareils, et celui qui existe au Conservatoire des arts et métiers est établi de la manière suivante (pl. III, fig. 8 et 9) : Un plateau de $0^m,32$ de diamètre, parfaitement plan, reçoit un mouvement uniforme, au moyen d'un poids suspendu à une corde enroulée sur un premier treuil. Le mouvement de ce treuil se transmet à un second arbre par une roue et un pignon dont les nombres de dents sont entre eux comme 6 : 1. Une roue montée sur ce second arbre conduit un second pignon fixé sur l'arbre du plateau. Cette roue et son pignon ont aussi des nombres de dents dans le rapport de 6 : 1; de sorte que le plateau fait 36 tours pour un tour du treuil. Sur l'arbre du plateau est un volant à 4 ailettes de $0^m,10$ de côté, qui sert à régulariser le mouvement par la résistance que l'air lui oppose, résistance qui, entre des limites assez étendues, croît, comme on sait, à peu près proportionnellement au carré de la vitesse.

Il résulte de cette disposition qu'au bout d'un temps assez court le mouvement du plateau, dont le centre de gravité, ainsi que celui des autres pièces, est sur l'axe de rotation, devient uniforme, ainsi qu'il est facile de s'en assurer en comptant à plusieurs reprises les nombres de tours faits par le second arbre, qui porte à cet effet une aiguille indicatrice.

Vis-à-vis du plateau, et parallèlement à sa surface, est une poulie dont le mouvement est en rapport connu avec celui que l'on veut observer, soit directement, soit indirectement. L'axe de cette poulie porte un petit bras sur lequel est monté un style, formé ordinairement par un pinceau imbibé d'encre de Chine.

Au moyen de dispositions simples on assure le parallélisme du cercle décrit par la pointe du style et de la surface du plateau, sur laquelle on fixe une feuille de papier. Le style peut, avant l'expérience, être éloigné de la feuille de

papier d'un demi-millimètre environ, et mis en contact avec elle à l'instant même où commence le mouvement.

On conçoit facilement d'après cette description succincte* que, le plateau tournant d'un mouvement uniforme et le style d'un mouvement inconnu, il résulte de ces deux mouvements simultanés une trace laissée sur la feuille de papier, qui, dépendant de cette simultanéité de mouvement, doit par son relèvement donner la relation des angles décrits par la poulie ou des espaces parcourus par le corps observé, et des angles décrits par le plateau ou des temps correspondants.

C'est ce qu'il est facile de voir en observant que, si le plateau était au repos, le style décrirait à sa surface un cercle d'un rayon égal à sa distance à l'axe A de la poulie; tandis qu'au contraire, si le style était au repos, et le plateau en mouvement, celui-ci porterait pour trace de son contact avec le pinceau un cercle ayant pour centre celui du plateau, et pour rayon la distance du style à ce centre. Cela posé, soit *o* l'origine de la courbe tracée pendant l'expérience; par ce point, faisons passer un cercle de rayon A*o* égal à la distance du style à l'axe de la poulie, et dont le centre soit à la distance connue AC de celui du plateau, et partageons ce cercle en dix parties égales au point 0, 1, 2, 3...., 9.

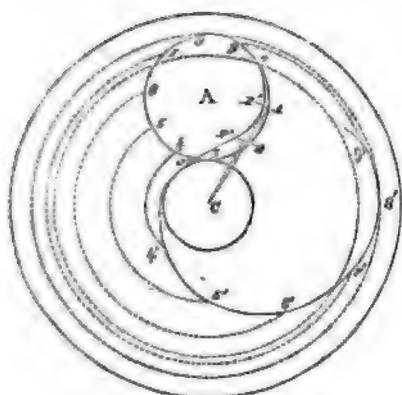


Fig. 19.

Par chacun de ces points menons des circonférences

* Voir pour plus de détails la description *des Appareils chronométriques*, insérée au compte rendu du congrès scientifique tenu à Metz en 1837.

de cercle ayant leur centre en C et pour rayons les distances C0, C1, C2, etc. Ces cercles couperont la courbe en des points 1', 2', 3', etc. Or, il est évident que le point 1' résulte des mouvements simultanés du style de 0 en 1, et du plateau décrivant l'angle 1C1'; par conséquent l'arc 01 donne l'angle décrit par la poulie ou l'espace parcouru par le corps, et l'angle 1C1' fournit la mesure du temps correspondant. On peut donc successivement relever ces espaces et en former une table qui représente la loi du mouvement.

Prenant ensuite les espaces parcourus pour des abscisses et les temps pour des ordonnées, on aura une courbe à coordonnées rectangulaires, dont on étudiera la nature pour en déduire la loi du mouvement observé.

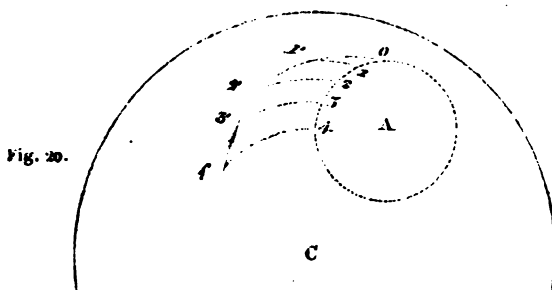
Si, par exemple, les abscisses ou les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps ou des ordonnées, la courbe sera une parabole, et le mouvement sera uniformément accéléré. Si la courbe dégénère soit dès l'origine, soit après un certain temps, en une ligne droite, le mouvement étudié est uniforme à partir de cet instant.

Lorsqu'il s'agit de mouvements très-rapides pour lesquels des styles chargés d'encre ne conviendraient pas, on peut employer des styles métalliques traçant sur des couches de matière molle, telle que de la cire mêlée de suif. C'est ainsi que l'on a pu déterminer facilement la loi du mouvement d'un chien de fusil, quoique ce mouvement s'accomplisse à peu près dans $\frac{1}{100}$ de seconde.

On commence par tracer sur le plateau au repos l'arc de cercle décrit par le style fixé à la tête du chien, et formé d'une aiguille légère d'acier; ce qui sert à déterminer sur le plateau un cercle de rayon CA sur lequel se projette en A le centre de la noix. Cela fait, on met le plateau en mouvement, et, quand on a déterminé par l'observation directe la vitesse de ce mouvement uniforme, on lâche l'aiguille, puis le chien, et l'on obtient une courbe 0, 1', 2', 3', 4'. L'origine *o* de cette courbe peut se déterminer d'abord à peu près exactement

à vue par l'examen de son point de tangence avec l'arc de cercle que le style a tracé avant le départ du chien. On trace le cercle décrit par la pointe et passant par cette origine *o*. Cet arc se termine à la circonférence que le style a tracée quand le chien s'est arrêté. On le partage en un nombre quelconque de parties, ou plutôt à partir du point *o* on prend des arcs 01, 02 égaux à un nombre donné de degrés, et cor-

Fig. 20.



respondant par conséquent à des angles connus décrits par le chien. Puis du point C comme centre, et des rayons C1, C2, C3, etc., on décrit des arcs de cercle qui rencontrent la courbe en 1', 2', 3', etc. Enfin les angles 1C1', 2C2', 3C3', donnent les temps correspondants. On peut alors comparer les angles décrits par le chien avec les temps employés. On trouve ainsi, par exemple, pour le fusil d'infanterie à percussion, modèle de 1840, les résultats suivants :

Arcs décrits par le centre de la fraisure......	m. 0,0053	m. 0,0106	m. 0,0160	m. 0,0213	m. 0,0226	m. 0,0319	m. 0,0375	m. 0,0426	m. 0,0479	m. 0,0520
Temps correspondants.....	sec. 0,00406	sec. 0,00604	sec. 0,00754	sec. 0,08864	sec. 0,00936	sec. 0,01050	sec. 0,01126	sec. 0,01190	sec. 0,01372	sec. 0,01318
Rapp. des carrés des temps aux arcs décrits.........	0,00310	0,00343	0,00355	0,00351	0,00330	0,00346	0,00340	0,00334	0,00338	0,00335

Moyenne.................................. ......0,00341.

En répétant trois fois l'expérience on a trouvé le rapport moyen

$$\frac{T^2}{E} = 0,00353 = \frac{2}{V_1},$$

et, l'arc total étant de $0^{m},052$ on trouve $T = 0'',01355$, et par suite

$$V_1 = \frac{2}{0,00353},$$

et enfin $$V = V_1 T = \frac{2 \times 0,01355}{0,00353} = 7^{m},68$$

pour la vitesse du style. Ce style était à $0^{m},061$ de l'axe de la noix, tandis que le centre de la fraisure n'est qu'à $0^{m},0602$, par conséquent la vitesse du chien à ce centre est

$$\frac{0,0602}{0,061} \times 7^{m},68 = 7^{m},58 \text{ en 1 seconde.}$$

On voit par cet exemple que l'on a pu déterminer un grand nombre de points de la courbe qui représente la loi du mouvement, et comme le rapport des espaces parcourus aux carrés des temps est constant, il s'ensuit que cette courbe est une parabole ou que le mouvement du chien est uniformément accéléré. Ainsi la force qui le produit est constante, et la forme de la courbe de la noix, ainsi que la résistance du ressort à la flexion, sont tellement combinées, que l'effort que le pouce doit exercer pour armer le chien perpendiculairement à sa crête est constant. Cela montre comment l'art de l'ouvrier peut quelquefois parvenir à la solution de problèmes de mécanique assez difficiles.

On peut étendre l'usage de ces appareils à l'observation de mouvements beaucoup plus rapides encore, car dans les expériences sur le chien du fusil, le plateau ne faisait que 6 tours en 1'' et l'on pourrait facilement en obtenir 10. Alors la circonférence de ce plateau, qui a $1^{m},00$ de développement environ, parcourrait 10 000 millim. en 1'', et, comme, à l'aide de l'instrument à relever les courbes, on peut apprécier facilement $\frac{1}{5}$ de millimètre, on pourrait donc obtenir les temps à $\frac{1}{50000}$ de seconde près.

Il serait même facile d'aller plus loin en augmentant les dimensions du plateau.

Si de plus on combine le mouvement de ce plateau avec l'électricité on pourra peut-être parvenir à mesurer la durée de certains phénomènes si rapides, que jusqu'ici on n'a pu les étudier.

De ce nombre, par exemple, serait la loi du mouvement des projectiles dans l'air, pour laquelle des essais ont déjà été tentés, mais encore avec peu de succès, parce qu'au lieu d'un appareil à mouvement continu on a employé des instruments chronométriques à mouvement oscillatoire ou intermittent.

78. *Plateaux en zinc.* — La feuille de papier qui dans l'appareil ordinaire reçoit les traces du style est collée mouillée par ses bords sur une plaque de zinc, et celle-ci se fixe sur le plateau. Cette disposition présente l'avantage d'éviter les inconvénients du retrait plus ou moins inégal du papier et de faciliter beaucoup le relèvement.

79. *Appareil à relever les courbes.* — La feuille de zinc séparée du plateau se place sur l'instrument qui sert au relèvement des courbes et s'y trouve de suite exactement centrée. La circonférence de cet instrument est divisée en mille parties. Une alidade mobile autour de l'axe porte sur sa longueur un disque armé de dix pointes, dont les extrémités partagent en dix parties égales la circonférence que le style aurait décrite sur le plateau au repos. On desserre la vis de pression qui fixe ce disque; on le fait tourner sur lui-même de manière que l'une de ces pointes corresponde à l'origine de la courbe. Cela fait, on serre la vis de pression, et le disque devient solidaire avec l'alidade. Dès lors il est évident que chacune des dix pointes, dans le mouvement de l'alidade, décrira le cercle auxiliaire 11′, 22′ 33′, etc., 99′, et qu'en faisant tourner l'alidade de façon que toutes les pointes successivement rencontrent la courbe, et lisant les angles décrits par cette alidade et correspondant à chaque pointe, on aura

les temps, qui sont proportionnels à ces angles, et les angles décrits par la poulie du style, par les numéros d'ordre des pointes.

Cet instrument, dû à M. le capitaine d'artillerie Didion, est à la fois d'une grande précision et d'une grande utilité dans toutes les opérations de ce genre et les facilite beaucoup.

Les appareils que l'on vient de décrire sont les premiers de ce genre que j'aie fait construire et ils sont d'un usage commode pour les expériences diverses que l'on peut avoir à faire, mais les résultats exigent un relèvement détaillé et ne parlent pas assez immédiatement aux yeux pour qu'il soit possible de les employer dans l'enseignement. Il m'avait semblé depuis longtemps utile d'appliquer sous une forme plus simple le principe de leur construction. C'est ce qui m'a conduit à faire faire l'appareil suivant :

80. *Description de l'appareil chronométrique à cylindre et à style pour observer les lois du mouvement.* — La pièce principale de cet appareil, dans le modèle adopté pour les lycées par le Ministère de l'instruction publique, est un cylindre vertical AB (fig. 21) de $2^m,10$ de hauteur, que l'on recouvre d'une feuille de papier blanc ordinaire, légèrement mouillée et collée par ses bords. Ce cylindre a $0^m,125$ de diamètre, ce qui correspond à une circonférence de $0^m,392$. Il repose sur un pivot et est mis en mouvement par un appareil analogue au tournebroche.

Un poids moteur est suspendu à une corde qui s'enroule à la surface d'un treuil C. A l'une des extrémités de ce treuil est une roue D à dents, inclinées à 45°, qui conduit une vis sans fin, dont l'axe vertical porte à sa partie supérieure un volant à ailettes, qui sert à régulariser le mouvement par l'effet de la résistance de l'air. On peut incliner ces ailettes pour accroître ou diminuer l'action régulatrice de l'air et, comme on a aussi la liberté de faire varier le poids moteur, on parvient à obtenir un mouvement uniforme du cylindre

à la vitesse d'un tour en 1 seconde ou un mouvement plus rapide si l'on en a besoin. Ce mouvement ne se régularisant que graduellement, il est convenable de ne faire l'expérience que l'on projette que quand le poids moteur a parcouru les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de sa chute; il reste encore plus de temps qu'il n'en faut pour les cas ordinaires.

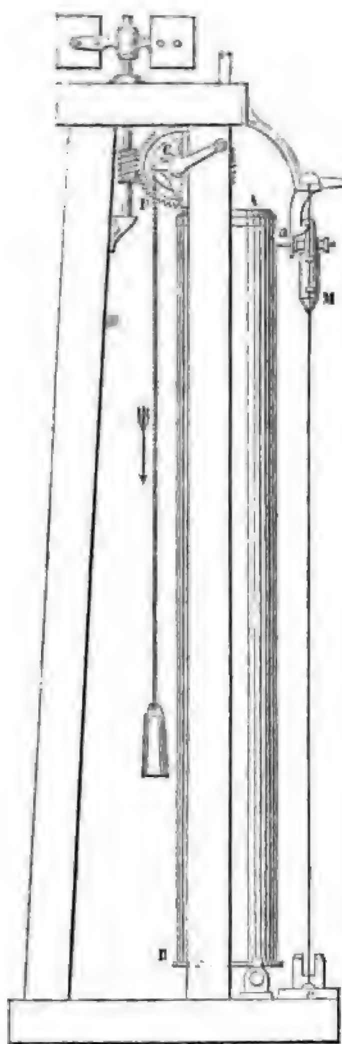


Fig. 21.

Il existe au Conservatoire des arts et métiers un modèle de cet appareil plus grand et plus complet, dont le cylindre a 3^m,10 de hauteur et 1 mètre de circonférence.

Si l'on conçoit les bases supérieure et inférieure de ce cylindre divisées à partir des extrémités d'une même génératrice en 100 parties égales, il est clair que chacune de ces parties correspondra à $\frac{1}{100}$ de la révolution ou à $\frac{1}{100}$ de seconde, et comme chacune d'elles peut être partagée en 10 parties ou en 10 millimètres, on voit que ces subdivisions successives donneront le moyen de mesurer le temps avec la précision de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{1000}$ de seconde et même moins. On a donc ainsi un véritable chronomètre très-sensible. La division, dont nous venons de parler, s'effectue facilement au moyen d'une règle en bois qui

se place sur le montant droit du bâtis de l'appareil parallèlement aux arêtes du cylindre et près de sa surface. La base du cylindre porte un cercle ayant 100 dents d'arrêt équidistantes dans lesquelles un cliquet s'engage successivement pour fixer le cylindre pendant qu'on trace ses génératrices avec la règle. Celle-ci est en outre divisée de 5 en 5 centimètres par des encoches dans lesquelles on place un crayon, que l'on tient fixe pendant que l'on fait tourner le cylindre, ce qui permet de tracer des parallèles à la base dont le développement fournit les ordonnées de la courbe du mouvement.

Cela posé si l'on conçoit qu'un corps M, suspendu vers le sommet du cylindre à l'aide d'un levier coudé à talon *ab*, soit abandonné à lui-même, tombe vers la terre et soit guidé verticalement dans sa chute, au moyen de deux fils métalliques bien tendus à l'aide de vis *v*, *v'* et bien parallèles aux arêtes du cylindre, et de plus que ce corps porte avec lui un style, formé par un pinceau imbibé d'encre ou plus simplement par un crayon de mine de plomb pressé contre la surface du cylindre par un ressort, on comprendra facilement que, si, pendant la descente du corps, le cylindre était en repos le style y laisserait la trace d'une des génératrices même du cylindre ou d'une ligne droite. Mais comme le cylindre se meut en même temps que le poids tombe, le style trace sur la feuille de papier une ligne courbe qui dépend de la simultanéité des deux mouvements.

81. *Discussion du résultat fourni par l'appareil.* — Lorsque cette courbe est obtenue et que l'on a tracé la génératrice du cylindre, qui correspond à son origine, il est facile d'en reconnaître la nature et de vérifier que le mouvement du style qui l'a tracée, et par conséquent celui du corps, qui portait ce style, était uniformément accéléré.

En effet, si l'on coupe la feuille de papier et qu'on l'enlève de dessus le cylindre, la génératrice menée par l'origine de la courbe pourra être prise pour l'axe des abscisses et

les longueurs mesurées sur cette ligne, à partir de l'origine, seront, en grandeur réelle, les espaces parcourus par le corps dans sa descente. Les ordonnées de cette courbe seront les développements d'autant d'arcs de cercle de la surface cylindrique et chaque millimètre de ces ordonnées représentera une fraction donnée de seconde.

On aura donc obtenu en réalité, avec cet appareil, une courbe dont les abscisses seront les espaces parcourus par le corps et dont les ordonnées seront les temps correspondants.

Or, en comparant directement les espaces parcourus aux temps mesurés sur la courbe, on reconnaîtra de suite que les premiers sont dans un rapport constant avec les carrés des seconds, ce qui montre que le mouvement de descente du corps était uniformément accéléré.

Par une construction graphique très-simple et qui consiste à mener à vue et avec une règle une série de tangentes à la courbe, à déterminer les points où elles coupent l'axe OY des ordonnées et à élever en ces points une perpendiculaire à chacune de ces tangentes, on reconnaîtra que toutes ces perpendiculaires se coupent en un même point, ce qui est une propriété caractéristique des paraboles, courbes dont les abscisses sont dans un rapport constant avec le carré de leurs ordonnées. Le point ainsi déterminé est le foyer de la parabole et fournit la véritable position de l'axe des abscisses et de l'origine de la courbe, dont nous n'avions précédemment supposé la position déterminée qu'à vue, ce qui laisse toujours un peu d'incertitude.

82. *Détermination de la vitesse.* — Puisque l'on a obtenu directement et par l'appareil lui-même la courbe qui représente la loi du mouvement uniformément accéléré et qu'on a reconnu que cette courbe était une parabole, on aura les vitesses du mouvement varié à chaque instant par l'inclinaison des tangentes à cette courbe sur ses ordonnées. Or, cette inclinaison dans la parabole est égale au double de l'ab-

scisse E divisé par le temps T, ou a $\frac{2E}{T}$: on a donc $V = \frac{2E}{T}$ d'où $\frac{V}{T} = \frac{2E}{T^2}$ et comme, par la comparaison des abscisses E au carré des ordonnées T, on a trouvé que $\frac{E}{T^2}$ est constant, l'on voit aussi que le rapport $\frac{V}{T}$ est constant, ce qui montre que, conformément à la définition du mouvement uniformément varié, les vitesses sont ici proportionnelles aux temps.

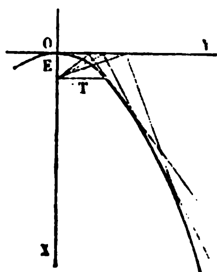


Fig. 22.

Si l'on cherche la vitesse V_1 acquise à la fin de la première seconde de la chute on trouve $V_1 = 2E_1$

E_1 étant l'espace parcouru après la première seconde ou l'abscisse correspondant à l'ordonnée $T = 1''$.

On voit donc que le nouvel appareil permet de déterminer directement par l'observation toutes les circonstances de la chute des corps qui, abandonnés à eux-mêmes tombent à la surface de la terre, de vérifier que ce mouvement est uniformément accéléré et d'obtenir aussi avec une certaine exactitude la valeur de la vitesse acquise par les corps dans la première seconde de leur chute et qui est égale à $9^m,8088$ environ à Paris *.

---

* Les modèles de l'appareil chronométrique que l'on vient de décrire et qui ont été faits pour les lycées, sortent des ateliers de M. Clair, mécanicien, rue du Cherche-Midi, 93.

Quelques constructeurs, dans un but d'économie, ont cru simplifier convenablement cet appareil en supprimant le treuil, l'engrenage et le volant régulateur. Ils ont remplacé le tout par une manivelle, à l'aide de laquelle on cherche à imprimer, tant bien que mal, un mouvement uniforme d'une vitesse connue. Quand on croit l'avoir atteint on laisse tomber le poids. Il est fâcheux de voir ainsi altérer la précision d'un appareil simple et susceptible d'une grande exactitude. C'est faire rétrograder l'art.

83. *Démonstration expérimentale du principe de la proportionnalité des forces aux vitesses.* — Ce principe que nous avons admis au n° 61, comme résultant de l'ensemble des phénomènes observés, et dont on n'avait jusqu'ici donné aucune démonstration directe, peut facilement être vérifié à l'aide de l'appareil qui vient d'être décrit, ainsi que nous l'avons fait avec M. Tresca, pour le cours de mécanique du Conservatoire. Imaginons que le mobile, de poids P qui est soumis à l'action de la pesanteur soit relié d'une manière quelconque, au moyen d'un fil par exemple, à un autre mobile, de poids p, libre de se mouvoir sur un plateau horizontal parfaitement dressé, et disposé d'une manière fixe à proximité de l'appareil. L'action de la pesanteur sur ce deuxième corps sera entièrement annulée par la résistance du plateau, et lorsque le corps P tombera, il est clair que c'est la seule action de la pesanteur sur ce corps qui mettra les deux corps en mouvement, et qu'ainsi la seule force P devra imprimer le mouvement à la masse $\frac{P+p}{g}$. Dans ces conditions la chute aura encore lieu d'un mouvement uniformément accéléré, mais évidemment moins rapide que quand le corps P est entièrement libre. La courbe tracée par le style est en effet une parabole plus ouverte que dans le cas de la chute parfaitement libre, et cette parabole peut servir à démontrer, comme nous l'avons indiqué précédemment, la vitesse V du système au bout d'un temps quelconque, au bout d'une seconde par exemple. L'action continue d'une force P imprime donc, en une seconde, à une masse $\frac{P+p}{g}$, une vitesse V mesurée expérimentalement.

On pourrait de même observer la vitesse V' d'une masse $\frac{P'+p'}{g}$, dans des circonstances analogues, en substituant un poids P' au poids moteur P, et un nouveau corps de poids p' au corps entraîné, de poids p.

Or, on peut à l'aide de cette double substitution faire en

sorte que $P+p=P'+p'$, auquel cas la masse mise en mouvement dans les deux cas sera identiquement la même, $\frac{P+p}{g}$ étant alors égale à $\frac{P'+p'}{g}$; on réalise de cette manière cette circonstance que deux poids moteurs P et P', qui sont de véritables forces, agissent pendant le même temps, une seconde, sur la même masse $\frac{P+p}{g}$; on a observé les vitesses acquises V et V' dans les deux cas, et il suffit, pour vérifier le principe, de s'assurer par l'examen des chiffres si l'on a la proportion

$$V : V' :: P : P'$$

qui est la traduction du principe de la proportionnelle entre les forces et les vitesses, tel que nous l'avons énoncé.

Comme toutes les expériences de précision, celle-ci exige quelques soins pour être conduite à bien, parce qu'il faut tenir compte des frottements et de toutes les résistances passives auxquelles le mouvement des différentes parties du système peut donner lieu.

Dans une série d'expériences, on a observé la vitesse moyenne du cylindre à la circonférence, pendant que le style exerce sur lui sa pression; elle s'est trouvée être de $0^{m}4766$ par seconde, et c'est par conséquent pour une abcisse égale à cette longueur que la vitesse a dû être relevée sur la courbe tracée par le style.

Le poids total était $6^{k}526$ en comprenant dans ce poids un chiffre de $0^{k}226$, déterminé par des expériences préliminaires, comme équivalent à la résistance due aux frottements.

Les poids moteurs ont été successivement $p=0^{k}245$

$p'=0^{k}490$

$p''=0^{k}700$

et les vitesses correspondantes observées $V=0,354$

$V'=0,672$

$V''=0,942$

Les rapports des poids moteurs étant :

$$\frac{p'}{p}=\frac{0{,}490}{0{,}245}=2{,}000 \qquad \frac{p''}{p}=\frac{0{,}700}{0{,}145}=2{,}857$$

les rapports correspondant entre les vitesses observées ont donné :

$$\frac{V'}{V}=\frac{0{,}772}{0{,}354}=1{,}898 \qquad \frac{V''}{V}=\frac{0{,}942}{0{,}354}=2{,}661.$$

La presque identité de ces rapports démontre, dans les limites de l'expérience, l'exactitude de la loi, qui pourrait de la même façon être démontrée dans les limites les plus étendues.

Les vitesses, calculées à priori, d'après la valeur de $g=9{,}8088$, auraient du être respectivement

$0^m{,}355 \qquad 0^m{,}676 \qquad 0^m{,}950$

qui diffèrent très-peu, comme on le voit, de celles qui ont été observées.

PRINCIPE DES FORCES VIVES.

84. *Mesure du travail mécanique développé par les forces motrices ou d'inertie dans le mouvement varié.* — On a vu précédemment que la force motrice et la réaction développée par l'inertie d'une masse M animée d'un mouvement de transport parallèle et varié avaient pour mesure commune l'expression

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v}{t} = M \cdot \frac{v}{t}.$$

Par conséquent, en appelant e le chemin élémentaire parcouru dans l'élément du temps t, on aura pour le travail élémentaire de la force F

$$Fe = M \cdot \frac{v}{t} \cdot e.$$

On remarquera que, si le mouvement s'accélère, le chemin parcouru par le point d'application de la force d'inertie, qui agit alors comme résistance, est décrit en sens contraire de cette force, qui développe alors *un travail résistant* égal au travail moteur de la force extérieure F. A l'inverse le travail de l'inertie devient un *travail moteur* si le mouvement tend à se retarder, et il est égal à celui de la force F qui produit le ralentissement.

On se rappellera que dans le mouvement varié la vitesse V à un instant quelconque est $V = \frac{e}{t}$, de sorte que l'expression ci-dessus devient $Fe = M.V.v$.

Le travail total développé par la force motrice pour imprimer à tous les éléments du corps de poids P ou de masse $\frac{P}{g} = M$ avec certaine vitesse commune V, à partir du

When the velocity is continually changing it is measured by the space passed over in an indefinitely short space of time, divided by the time.

$$V = \frac{s}{t} \qquad V = \frac{ds}{dt}.$$

The trapezium e'e'f'f is taken as a parallelogram.

v' v $MV^2 - MV'^2$

V v' $MV'^2 - MV^2$

repos, est donc la somme de toutes les quantités de travail élémentaires semblables. Or, si l'on porte les vitesses sur une ligne d'abscisses, et qu'on élève à chaque point des perpendiculaires égales aux abscisses ou aux vitesses, il est clair que, pour un accroissement élémentaire $v = cf$ de la vitesse, le produit Vv sera représenté par l'aire du petit trapèze $ee'f'f$, et que la somme de tous les produits semblables, depuis le départ où $V=0$ jusqu'à $V=AB=BB'$, sera représentée par

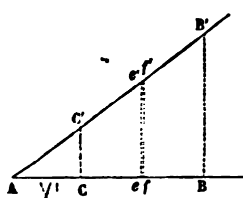


Fig. 23.

$$\frac{1}{2}AB \times BB' = \frac{1}{2}V^2,$$

de sorte que le travail total développé par la force motrice ou le travail développé par la force d'inertie sera, en l'appelant T :

$$T = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}.V^2.$$

85. *Force vive.* — Ce produit de la masse par le carré de la vitesse a reçu des géomètres le nom de *force vive*, expression de convention à laquelle il ne faut ajouter aucun sens métaphysique.

Il résulte donc de ce qui précède que *le travail développé par une force qui communique ou enlève à tous les éléments d'un corps de masse* $M = \frac{P}{g}$ *une vitesse commune* V *est égal à la moitié de la force vive correspondant à cette vitesse.*

Si le corps était animé d'une certaine vitesse commune V' ou d'une force vive MV'^2 au moment où la force commence à modifier son mouvement, il est évident que la force ne lui aurait communiqué, quand sa vitesse serait devenue V ou sa force vive MV^2, que la différence ou l'excès de la force vive qu'il possède à la fin, sur celle qu'il avait à l'origine de son action, savoir $MV^2 - MV'^2$ s'il y avait eu accélération, ou $MV'^2 - MV^2$ s'il y avait eu retard, et que le travail cor-

respondant, représenté alors par la différence des triangles ABB′ et ACC′, serait égal à

$$\frac{1}{2}(MV^2-MV'^2),$$

ou

$$\frac{1}{2}(MV'^2-MV^2),$$

selon l'un ou l'autre cas.

Ainsi, en général, *le travail d'une force qui accélère ou retarde le mouvement d'un corps qui se meut dans sa direction propre est égal à la moitié de la force vive qu'elle a communiquée ou enlevée à ce corps.*

Ce principe a reçu le nom de *principe des forces vives*, et sa généralisation sert de base à toute la mécanique appliquée.

86. *Effets des gaz de la poudre dans les armes et dans les bouches à feu.* — Les considérations des nos 65 et suivants, relatives à la communication des quantités de mouvement, et le principe des forces vives s'appliquent directement aux effets des gaz explosifs dans les armes à feu, avec une approximation qui permet d'en déduire des conséquences utiles.

Si l'on considère, en effet, ce qui se passe pendant l'intervalle de temps fort court qui s'écoule pendant le trajet du projectile, et si l'on suppose que la charge soit assez faible pour que l'on puisse faire abstraction de l'inertie des gaz qu'elle produit, l'on peut admettre que les efforts exercés par les gaz sur le projectile pour le chasser, et sur le fond de l'âme, pour faire reculer la bouche à feu, sont les mêmes *, et comme ils sont exercés pendant le même

---

* En réalité et dans les conditions ordinaires du service, le poids de la charge de poudre étant $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}$ de celui du projectile, l'on ne peut faire cette supposition, et il est alors évident que la tranche de gaz qui agit contre le fond de l'âme a une tension plus grande que celle qui est contre le projectile. Par conséquent la vitesse de recul est plus grande que celle que l'on indique ici.

temps, en nommant P et P' le poids du projectile et celui de la bouche à feu, y compris l'affût, v et v' les éléments de vitesse qui leur sont respectivement communiqués dans un élément de temps, l'on aura, d'après le principe de la proportionnalité des forces aux vitesses n° (61)

$$F : P :: v : gt, \quad \text{et} \quad F : P' :: v' : gt,$$

d'où l'on déduit

$$Pv = P'v', \quad \text{ou} \quad P : P' :: v' : v,$$

c'est-à-dire que les vitesses communiquées dans l'élément du temps au projectile et à la bouche à feu, sont dans ces suppositions en raison inverse du poids de ces corps, et comme les vitesses totales communiquées au moment où le projectile quitte la bouche à feu, sont égales à la somme de tous les éléments de vitesse qu'ils ont reçus pendant la durée de l'action des gaz, on a aussi

$$P : P' :: V' : V,$$

V et V' étant les vitesses totales imprimées au projectile et à la bouche à feu.

Si l'on applique cette conséquence au fusil d'infanterie à percussion, transformé et actuellement en service, on a

$$P' = 4^{kil},605, \quad P = 0^{kil},029,$$

d'où

$$\frac{P'}{P} = \frac{4,605}{0,029} = 159.$$

Or, les expériences faites avec le pendule balistique apprennent que la vitesse communiquée à la balle de 29 grammes par une charge de 8 grammes de poudre de guerre, est V = 405 mètres. On déduit donc de la proportion ci-dessus

$$V' = \frac{P}{P'} \times V = \frac{405^m}{159} = 2^m,547.$$

Cette vitesse de recul est déjà considérable, et l'on doit re-

marquer que, d'après la note précédente la vitesse réelle est encore plus grande.

L'on voit que l'on ne doit pas chercher à alléger les armes portatives au delà d'une certaine limite, si l'on ne veut augmenter la vitesse de recul dans une trop grande proportion.

D'après les valeurs précédentes, la quantité de mouvement communiquée au fusil serait

$$Ft = \frac{4^{kil},605}{9,809} \times 2^{m},547 = 1,195.$$

Si l'homme résiste au recul en cédant, de façon que cette quantité de mouvement soit éteinte en $0'',50$ par exemple, l'effort moyen exercé à l'épaule sera

$$F = \frac{1,195}{0,50} = 2^{kil},390.$$

Pour diminuer cet effort, il convient donc de refuser l'épaule doucement et d'interposer entre la crosse et l'épaule un corps compressible formant matelas. Telle est l'origine de l'épaulette.

87. *Application du principe des forces vives.* — Ce principe permet d'apprécier une partie des effets si rapides des gaz de la poudre sur les bouches à feu et sur les projectiles. En effet, en conservant les notations précédentes, l'on voit que

La force vive communiquée au projectile est

$$\frac{P}{g} V^2 = MV^2.$$

La force vive communiquée à la bouche à feu est

$$\frac{P'}{g} V'^2 = M'V'^2.$$

La force vive totale développée par les gaz est donc

$$\frac{P}{g} V^2 + \frac{P'}{g} V'^2 = MV^2 + M'V'^2.$$

Mais à cause du poids considérable de la bouche à feu et de son affût, la force vive qui est communiquée au projectile est beaucoup plus grande que celle qui est imprimée à la bouche à feu et dans les applications ordinaires celle-ci peut être négligée.

Ainsi, pour le cas du fusil d'infanterie, l'on a

pour le projectile, $\frac{P}{g}V^2 = \frac{0^{kil},029}{9,809} \times \overline{405}^2 = 484,940.$

pour le fusil, $\frac{P'}{g}V'^2 = \frac{4^{kil},605}{9,809} \times \overline{2,547}^2 = \quad 3,045.$

Le rapport de ces forces vives est égal à $\frac{PV^2}{P'V'^2} = 159.$

La quantité de travail développée par les gaz de la poudre sur le projectile étant numériquement égale à la moitié de la force vive qui lui a été imprimée, on a, dans le cas actuel, pour le travail développé par $0^{kil},008$ de poudre, $\frac{484,94}{2} = 242^{km},47$; et l'on voit que, dans la comparaison des effets mécaniques ou des quantités de travail produits par des poudres d'espèces différentes, l'on peut se contenter de les mesurer par la moitié de la force vive imprimée au projectile.

88. *Relation entre les charges et les vitesses.* — Le travail des gaz de la poudre doit être évidemment proportionnel à leur quantité et par conséquent au poids de la charge de poudre qui les produit, pourvu que l'on puisse admettre que cette charge soit entièrement brûlée dans la bouche à feu avant la sortie du projectile : ce qui est sensiblement exact pour les fusils, bien au delà des charges ordinaires, mais ne l'est pour les canons que jusqu'aux charges de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$ du poids du boulet.

Par conséquent, en appelant C et C_1 les charges, P et P_1 les poids des projectiles, V et V_1 les vitesses qui leur sont

communiquées par ces charges, on doit avoir la proportion

$$PV^2 : P_1V_1^2 :: C : C_1,$$

on en conclut :

1° Que pour des projectiles de même poids ou pour $P = P_1$ l'on a

$$V^2 : V_1^2 :: C : C_1;$$

c'est-à-dire que *dans une même bouche à feu et avec des projectiles de même poids, les vitesses imprimées à ceux-ci sont entre elles comme les racines carrées des charges.*

2° Que si les charges sont égales ou $C = C_1$, l'on a

$$PV^2 = P_1V_1^2;$$

ce qui montre que *dans les bouches à feu de même proportion et à charges égales, les vitesses des projectiles sont entre elles en raison inverse des racines carrées des poids des projectiles.*

89. *Vérification de ces conséquences par l'expérience.* — La première de ces lois, énoncée d'abord par Hutton, géomètre anglais, comme conséquence de ses expériences, a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses recherches exécutées avec des fusils de calibres différents et des balles dont le *vent* a varié dans des limites étendues. Quelques-unes ont été faites par M. le colonel d'artillerie Mallet, avec la poudre de mousqueterie ordinaire; les autres l'ont été avec des poudres de diverses espèces et avec du pyroxile à base de coton ou *coton-poudre*, à l'occasion des recherches ordonnées par le Ministre de la guerre sur cette substance remarquable.

Les résultats de ces expériences sont consignées dans le tableau suivant, et pour les dégager des anomalies que présentent toujours de semblables recherches, quel que soit le soin que l'on y apporte, je les ai représentés graphiquement dans les figures 1 et 2 de la planche I en prenant les charges pour abscisses et les forces vives pour ordonnées.

Vitesses initiales et forces vives communiquées aux balles par la poudre de mousqueterie à différentes charges.

CHARGES EN GRAMMES.	Calibre du fusil. . 18mill,30 Diam. de la balle. 16mill,30 Poids de la balle. 25gr,80 Vent. 1mill,70		Calibre du fusil. . 17mill,50 Diam. de la balle. 16mill,30 Poids de la balle. 25gr,80 Vent. 1mill,20		Calibre du fusil. . 18mill,00 Diam. de la balle. 17mill,00 Poids de la balle. 29gr,00 Vent. 1mill,00		Calibre du fusil. . 17mill,50 Diam. de la balle. 17mill,00 Poids de la balle. 29gr,00 Vent. 0mill,50		Calibre du fusil. . 17mill,55 Diam. de la balle. 17mill,40 Poids de la balle. 31gr,30 Vent. 0mill,15		Calibre du fusil. . 17mill,50 Diam. de la balle. 17mill,40 Poids de la balle. 31gr,30 Vent. 0mill,10	
	VITESSES initiales.	FORCES vives.	VITESSES initiales.	FORCES vives.	VITESSES initiales.	FORCES vives.	VITESSES initiales.	FORCES vives.	VITESSES initiales.	FORCES vives.	VITESSES initiales.	FORCES vives.
gr.	m.		m.		m.		m.		m.		m.	
1	68,98	15,74	94,27	23,37	100,36	28,75	142,27	59,84	146,19	68,20	160,75	82,46
2	122,90	39,73	169,90	75,92	176,08	93,58	228,13	153,87	238,87	182,07	258,82	213,76
3	182,51	87,62	234,09	144,14	226,51	151,69	278,44	229.20	293,60	275,06	301,76	290.57
4	227,46	136,09	284,96	213,58	269,37	214,53	338,34	338,43	337,78	364,08	347,39	384,21
5	280,46	207,05	320,15	269,61	315,08	293,51	377,19	420,63	383,97	476,46	395,24	497.97
6	322,63	273,79	360,12	341,12	352,08	366,49	408,86	494,23	410 81	538,53	420,15	563,20
7	354,93	339,13	396,16	412,81	381,35	429,95	438,91	569,53	435,12	604,14	439,16	615,42
8	379,25	377,45	414,09	451,01	404,91	484,73	468,55	647,60	456,68	665,58	467,99	698,85
9	403,31	438,51	441,57	512,88	430;17	547,09	493,14	718,99	»	»	»	»
10	421,87	475,10	465,29	569,44	449,13	596,38	525,25	828,14	»	»	»	»
11	448,11	528,27	488,44	627,51	474,88	666,73	554,71	909,74	»	»	»	»
12	472,38	586,92	499,21	672,60	488,26	738,05	580,00	992,29	»	»	»	»
13	485,57	620,16	523,56	721,00	502,10	780,48	»	»	»	»	»	»
14	505,91	673,22	540,51	768,42	530,23	831,21	»	»	»	»	»	»
15	522,55	726,50	576,50	874,09	553,09	904,42	»	»	»	»	»	»

Dans les premières expériences, on a fait varier, outre les charges, la différence de diamètre entre le canon et la balle, ou ce que l'on nomme le *vent*, pour reconnaître l'influence de cette quantité sur l'effet produit par la poudre.

Les figures démontrent l'exactitude de la loi de proportionnalité entre les charges et les forces vives : on sait en effet que, dans ce cas, la courbe qui représente la relation entre ces deux quantités doit être une ligne droite qui passe par l'origine des coordonnées.

90. *Comparaison des forces vives communiquées par diverses poudres.* — D'autres expériences ont été exécutées avec des poudres de différentes espèces et avec du pyroxile ou *coton-poudre*. Elles ont aussi fourni la vérification de cette loi importante, et ont conduit aux formules suivantes entre les forces vives communiquées et les charges de poudre. Les fusils employés étaient du calibre de 17^{mill},50, et les balles pesaient 25^{gr},80.

Forces vives communiquées aux balles de fusil par différentes matières explosives.

NATURE DES MATIÈRES EXPLOSIVES.		FORCES VIVES communiquées aux balles.	CHARGES équivalentes pour l'effet balistique.
Poudres du Bouchet	de mine ronde ordinaire	$MV^2 = 28,37C$	14^{gr},70
	à mousquet.	$MV^2 = 52,60C$	8 ,00
	à canon.	$MV^2 = 59,00C$	7 ,10
Poudres d'Esquerdes	de chasse fine.	$MV^2 = 72,83C$	5 ,77
	de chasse extra-fine....	$MV^2 = 82,14C$	4 ,55
Pyroxile cardé de Montreuil.		$MV^2 = 159,25C$	2 ,83
Pyroxile cardé du Bouchet.		$MV^2 = 142,00C$	2 ,95
Pyroxile filé du Bouchet.		$MV^2 = 147,60C$	2 ,85

Ces résultats montrent quelle influence énorme la composition et le mode de préparation des matières explosives peuvent exercer sur les effets obtenus.

"Vent". Windage.

Pyroxile. Gun cotton..

Azotique Nitrée

91. *Utilité de la considération des efforts moyens.* — Nous aurons fréquemment à substituer, dans les calculs relatifs aux proportions qu'il convient de donner aux diverses parties des machines, les efforts moyens aux efforts variables exercés par les forces qui sollicitent ces organes ; mais pour indiquer par un exemple tout le parti que l'on peut tirer de la considération de ces efforts moyens pour apprécier, au moins approximativement, certains effets très-complexes, prenons un autre exemple, relatif à ce qui se passe dans la déflagration des matières explosives.

92. *Comparaison des effets de la poudre et de ceux du pyroxile dans les armes.* — Lorsque la découverte d'un procédé par lequel on peut transformer les différentes substances ligneuses en matière explosive fut connue, l'excessive rapidité de combustion de quelques-uns de ces produits, et surtout celle du coton préparé par l'acide azotique concentré, qu'on nomma alors *poudre-coton*, *fulmicoton*, et plus tard *pyroxile*, parut à beaucoup de personnes une propriété précieuse et de nature à donner à ce produit un avantage considérable sur la poudre ordinaire. Mais les officiers d'artillerie expérimentés, qui n'avaient pas oublié les fâcheux effets produits sur des canons de bronze par des poudres d'une grande énergie et d'une combustion rapide, que l'on avait essayé d'introduire dans le service vers 1828, regardèrent, au contraire, cette propriété comme beaucoup plus dangereuse qu'utile. Ils savaient, en effet, que l'inflammation de la poudre, quoique graduelle, se fait si rapidement et produit si promptement une grande quantité de gaz que la tension de ces gaz atteint sa valeur maximum alors que le projectile n'est encore déplacé que d'une fort petite quantité. Dans de savantes recherches, M. le général Piobert avait montré que ce maximum de tension s'élevait d'autant plus et s'établissait d'autant plus tôt que les poudres étaient d'une combustion plus rapide, et il avait fait voir que c'était à cette circonstance que l'on devait attribuer la prompte des-

truction des bouches à feu par les poudres vives et denses qui, pour ce motif, avaient été nommées plus tard poudres brisantes. On était donc fondé à penser que précisément à cause de sa rapidité de combustion, le pyroxile de coton devait être d'un emploi dangereux pour les armes.

Ces conséquences parfaitement logiques de tous les faits connus jusqu'alors furent peu goûtées à ce moment d'engouement pour des produits si nouveaux et si extraordinaires, et les conseils de la prudence furent pris pour les préventions de la routine.

Le meilleur moyen de trancher la question, c'était de consulter l'expérience, et c'est ce qui a été fait avec beaucoup de soins et de persévérance sur une grande échelle. Voici la marche qui a été suivie.

Pour parvenir à comparer, au moins approximativement, les tensions des gaz de la poudre et du pyroxile à différents instants du mouvement du projectile dans l'âme, on a successivement tiré, avec les charges de 8 gr. de poudre de guerre et 3 gr. de pyroxile à base de coton, des canons de fusil du calibre de guerre de 18 mill., dont les longueurs décroissantes ont été réglées ainsi qu'il suit :

$1^m,083$ $0^m,833$ $0^m,646$ $0^m,493$ $0^m,374$ $0^m,272$ $0^m,187$
$0^m,119$ $0^m,085$ $0^m,068$;

ce qui correspond à des nombres de calibres respectivement égaux à

64 49 38 29 22 16 11 7 5 4 calibres.

Les charges de 8 grammes de poudre et de 3 grammes de pyroxile avaient, d'après des expériences préalables, été adoptées comme à peu près équivalentes, mais on reconnut dans le cours même des expériences qu'il suffisait de $2^{gr},86$ de pyroxile pour imprimer à une même balle, du poids de $28^{gr},8$, une vitesse de $376^m,7$ égale à celle que lui communiquent 8 grammes de poudre. Les comparaisons ultérieures sont donc faites pour ces charges.

Les vitesses communiquées aux balles ont été mesurées

about $\frac{1}{4}$th

Tranche. *Face*.

$$2FE = MV^2$$

$$F = \frac{1}{2}\frac{MV^2}{E}$$

âme. *chamber*.

au moyen du pendule balistique, en plaçant le canon du fusil sur un châssis, de façon que la tranche de la bouche fût à $2^m,00$ de celle du récepteur balistique.

Si l'on se rappelle que la force vive communiquée à la balle est, en vertu du principe des forces vives, égale au double de la quantité de travail développé par les gaz, et que l'effort moyen de ces gaz ou l'effort constant qui communiquerait dans chaque cas à la balle la même force vive est égal à la moitié de cette force vive divisée par la longueur du chemin parcouru dans le canon par le projectile, on voit que de l'observation de la vitesse imprimée à celui-ci, et que l'on nomme *vitesse initiale*, l'on peut facilement déduire la valeur de cet effort moyen.

Il est d'ailleurs évident que cette valeur ainsi déterminée sera toujours inférieure à l'effort maximum et d'autant plus que le canon sera plus long, de sorte que les conclusions que l'on pourra tirer de la comparaison des efforts moyens des gaz de la poudre à ceux des gaz du pyroxile seront d'autant plus voisines de la vérité, que le projectile aura parcouru moins de chemin dans l'âme, et se rapprocheront surtout de la vérité pour les premiers moments de son déplacement, qui sont précisément ceux où il importe le plus d'étudier ces efforts.

La longueur d'âme occupée par la charge était la même pour la poudre que pour le coton et de 48 mill.; en la retranchant de la longueur intérieure du canon on a eu le chemin parcouru par le point postérieur de la balle dans le canon, et en divisant la moitié de la force vive communiquée par cette longueur on a obtenu l'effort moyen cherché.

Il convient de remarquer que cette estimation du chemin parcouru par le projectile, pendant qu'il est soumis à l'action des gaz, est celle que l'on adopte ordinairement dans les calculs de ce genre, mais qu'elle n'est pas tout à fait exacte. En effet, quand le centre du projectile a dépassé la tranche de la bouche, une portion des gaz s'échappe autour de ce corps. Cependant ces gaz sortant avec une grande vitesse, leur action impulsive se continue en partie au dehors. Quoi

qu'il en soit, la valeur adoptée ci-dessus pour le chemin parcouru par le projectile sous l'action du gaz est plutôt trop grande que trop faible : par conséquent celles des efforts moyens que l'on en déduit sont trop petites et les conclusions que l'on en déduit seront vraies *a fortiori*.

Cela posé, l'on a représenté planche 4 les résultats des expériences et du calcul de deux manières différentes. Dans la première figure (3) on a pris les longueurs d'âme parcourues par la balle dans le canon pour abscisses et les forces vives pour ordonnées; et dans la deuxième figure (4) on a pris aussi les longueurs d'âme parcourues par la balle dans le canon pour les abscisses, et pour ordonnées les efforts moyens correspondants développés, soit par les gaz de la poudre, soit par les gaz du pyroxile. On a eu ainsi l'expression graphique des résultats contenus dans le tableau suivant.

Résultats des expériences comparatives sur les vitesses, les forces vives et les efforts moyens développés par les gaz de la poudre de guerre et ceux du pyroxile de coton.

LONGUEURS d'âme		VITESSES communiquées		FORCES VIVES communiquées		EFFORT MOYEN exercé	
totales.	parcourues par la balle.	par 8^{gr} de poudre.	par 2^{gr},86 de pyroxile.	par la poudre.	par le pyroxile.	par les gaz de la poudre.	par les gaz du pyroxile.
m.	m.	m.	m.			kil.	
1,083	1,035	376,72	376,59	416,4	416,4	201,2	201,2
0,833	0,785	376,18	387,33	415,2	440,5	264,5	280,6
0,646	0,598	349,53	379,62	359,0	424,1	300,2	353,8
0,493	0,445	316,87	358,52	294,6	377,4	331,2	424,7
0,374	0,326	286,07	360,38	240,2	381,3	368,3	584,3
0,272	0,224	261,20	326,51	200,2	313,0	446,8	698,7
0,187	0,139	220,96	294,38	143,1	254,4	515,3	915,2
0,119	0,071	161,65	250,54	76,7	184,3	539,9	1297,9
0,085	0,037	115,27	175,94	39,0	90,8	526,9	1228,3
0,068	0,020	89,33	119,23	23,4	41,7	585,3	1048,5

$$\frac{493}{227} = \frac{2\dot{5}}{1} \text{ nearly.}$$

L'examen de la figure (3) montre 1° que pour la poudre la force vive et par conséquent la vitesse communiquée à la balle ne croît plus sensiblement au delà de la longueur de $0^{m},80$, correspondant à 49 calibres;

2° Qu'avec le pyroxile la force vive ou la vitesse maximum paraît correspondre à la même longueur et qu'elle décroîtrait avec des longueurs plus considérables;

3° Qu'enfin les forces vives communiquées par les charges de 8 grammes de poudre et de $2^{gr},86$ de pyroxile sont égales pour les longueurs de $1^{m},083$ ou de 64 calibres, mais que pour des longueurs plus grandes le pyroxile perdrait l'avantage qu'il a pour des longueurs plus petites.

La figure (4) montre qu'à partir de la longueur de $1^{m},083$ pour laquelle les charges de 8 grammes de poudre et de $2^{m},86$ de pyroxile ont donné les mêmes forces vives et par suite les mêmes efforts moyens, l'effort exercé par les gaz du pyroxile l'emporte toujours sur celui des gaz de la poudre à mesure que la longueur diminue, et que pour les petites longueurs de canon, ou, ce qui revient au même, pour les premiers déplacements du projectile, la tension moyenne maximum des gaz paraît correspondre à l'instant où le projectile s'est déplacé de $0^{m},075$, et est alors de $1297,9^{kil}$ ou de $\frac{1297^{kil}}{0^{m.q},0002545} = 5\,097\,000^{kil}$ * par mètre carré, ou enfin de $\frac{5\,097\,000}{10\,330} = 493^{atm},4$, tandis que la tension moyenne maximum des gaz de la poudre ne s'élève qu'à $585^{kil},3$ ou $\frac{585,3}{0,0002545} = 2\,300\,000^{kil}$ par mètre carré ou $\frac{2\,300\,000}{10\,330} = 227^{atm},7$, en prenant même sa valeur correspondante à la plus faible longueur, qui paraît s'écarter un peu de la loi suivie pour les autres longueurs.

* La surface du grand cercle de la balle est $\frac{\overline{1^{c},80}^2}{1,273} = 2^{c.q},545$.

Il suit de là que la pression moyenne maximum produite par les gaz de la poudre ne s'élèverait pas à la moitié de celle produite par les gaz du pyroxile, aux charges de même effet balistique.

Si maintenant l'on remarque que, d'après les dimensions des fusils d'infanterie, quand le projectile s'était déplacé de 75 millimètres, il se trouve dans une partie du canon où l'épaisseur du métal est $E = 0^{m},0054$, il est facile de voir d'après une formule connue de la résistance d'un cylindre à la rupture, qu'en supposant le métal de qualité moyenne, la pression intérieure capable de produire la rupture serait, par unité de surface,

$$p = \frac{2E}{D} \cdot \frac{R}{10\,330} = \frac{0{,}0\,108}{0{,}018} \cdot \frac{40\,000\,000^{kil}}{10\,330} = 2323^{atm},$$

et quand le métal est altéré par le tir ou de qualité inférieure, elle est :

$$p = \frac{0{,}0108}{0{,}018} \cdot \frac{25\,000\,000}{10\,330} = 1452 \text{ atmosphères.}$$

Ainsi, dans ce dernier cas, la pression moyenne maximum des gaz de la poudre ne serait que $\frac{227{,}7}{1452} = \frac{1}{6{,}4}$ de la pression de rupture, tandis que celle des gaz du pyroxile en serait les $\frac{493{,}4}{1452} = \frac{1}{2{,}95}$.

Si l'on se reporte aux résultats comparatifs rapportés précédemment sur les forces vives communiquées par les différentes matières explosives, et d'après lesquelles on a vu que la charge de pyroxile était à la charge équivalente de poudre de chasse fine comme 72,83 : 159,25, on voit que la charge de pyroxile équivalente à celle de $27^{gr},5$ de poudre de chasse que l'on emploie dans les épreuves des canons de fusil serait de $12^{gr},40$. Or, il arrive quelquefois que des canons crèvent avec la charge de $27^{gr},5$ de poudre de chasse, et puisqu'à même effet balistique le pyroxile développe, dès

Sporting Powder.

poids P, se transforme dans sa descente en une force vive $\frac{P}{g}\frac{V^2}{2}$ = PH. Puis, lorsque le mouton atteint la tête du pilot, il développe en vertu de son inertie, des efforts qui compriment cette tête, surmontent la résistance du sol à l'enfoncement, et produisent un travail utile correspondant.

Dans le percement, le découpage des métaux au mouton, la résistance vaincue est celle que le métal oppose à la séparation de ses molécules, et l'épaisseur de la pièce est le chemin parcouru.

L'exemple déjà cité de l'action de la poudre sur les projectiles nous montre d'abord le travail transformé en force vive, puis, pendant la pénétration des projectiles dans un milieu quelconque, la force vive employée à détruire le travail résistant du milieu.

95. *Dans les chocs il y a toujours perte de travail.* — Les chocs ayant toujours, ou presque toujours, pour effet d'altérer plus ou moins l'élasticité des parties en contact, il y a un certain travail consommé pendant cette altération et qui n'est pas restitué. Ils occasionnent donc une perte de travail.

C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de montrer, pour quelques cas simples, par les considérations suivantes.

96. *Travail dépensé pendant la période de compression du choc de deux corps non élastiques.* — En appelant toujours M et V la masse et la vitesse du corps choquant, et M′ et V′ la masse et la vitesse du corps choqué, on remarquera que la force vive totale possédée par ces deux corps avant le choc était $MV^2 + M'V'^2$, et qu'après le choc, puisqu'ils marchent d'une vitesse commune $U = \frac{MV + M'V'}{M + M'}$, leur force vive sera $(M + M')U^2$. Par conséquent la force vive, détruite pendant la compression et employée à la produire, sera

$$MV^2 + M'V'^2 - (M + M')U^2 = \frac{MM'}{M + M'}(V - V')^2,$$

$$(M+M')u^2 = 0$$

et le travail consommé par cette compression est

$$\frac{1}{2}\frac{MM'}{M+M'}(V-V')^2.$$

Si le corps choqué avait marché avant le choc à la rencontre du corps choquant, on a vu que quand le corps M' rétrograde et marche après le choc dans le sens du mouvement du corps M, on a pour la vitesse commune après le choc

$$U=\frac{MV-M'V'}{M+M'},$$

et alors la perte de force vive qui produit la compression est

$$MV^2+M'V'^2-(M+M')U^2=\frac{MM'}{M+M'}\{V+V'\}^2,$$

et le travail consommé par cette compression est

$$\frac{1}{2}\frac{MM'}{M+M'}\{V+V'\}^2.$$

Si, après le choc, dans ce dernier cas, la vitesse U était nulle, ce qui arrive comme on l'a vu quand $MV=M'V'$, le travail consommé par la compression se réduit à

$$\frac{1}{2}(MV^2+M'V'^2),$$

ce qui est d'ailleurs évident, puisque les deux corps sont réduits au repos par le choc.

Si la masse du corps choquant M est très-grande par rapport à celle du corps choqué, la perte de travail

$$\frac{1}{2}\frac{MM'}{M+M'}(V\mp V')^2=\frac{1}{2}\frac{M'}{1+\frac{M'}{M}}(V\mp V')^2$$

se réduit, à cause de la petitesse du rapport $\frac{M'}{M}$ vis-à-vis de l'unité, à

$$\frac{1}{2}M'\{V\mp V'\}^2;$$

dans le premier cas $\frac{1}{2}M'\{V-V'\}^2$ est le travail correspondant

à la force vive gagnée par le corps choqué, et dans le second $\frac{1}{2}M'\{V+V'\}^2$ est le travail correspondant à la force vive qui est due à la somme de la vitesse V', que le corps choqué a perdue dans un sens, et de celle V qu'il a reçue en sens contraire, parce qu'alors U se réduit à

$$U=\frac{MV-M'V'}{M+M'}=\frac{V-\frac{M'}{M}V'}{1+\frac{M'}{M}}=V,$$

attendu la petitesse de $\frac{M'}{M}$ par rapport à l'unité.

Si le corps choqué était au repos avant le choc, on a $V=0$, et la perte de travail due à la compression est

$$\tfrac{1}{2}M'V'^2,$$

attendu que la vitesse du corps choquant n'est pas sensiblement altérée, et que $U=V$ comme ci-dessus.

Si, au contraire, la masse du corps choqué est très-grande par rapport à celle du corps choquant, on a pour la perte de travail relative au premier cas, où les corps marchent dans le même sens

$$\tfrac{1}{2}\frac{MM'}{M+M'}(V-V')^2=\tfrac{1}{2}\frac{M}{\frac{M}{M'}+1}(V-V')^2=\tfrac{1}{2}M(V-V')^2,$$

attendu la petitesse du rapport $\frac{M}{M'}$ vis-à-vis de l'unité.

97. *Du travail dû à la compression et au retour à la forme primitive dans le cas des corps élastiques.* — Si les corps étaient parfaitement élastiques, il est clair que dans leur retour à la forme primitive les ressorts moléculaires développant les mêmes efforts en revenant aux mêmes degrés de tension et leurs points d'application parcourant les mêmes chemins que dans la compression, le travail total développé par ces efforts, variables de la même manière dans les deux cas, serait le même, et que par conséquent le travail dû au

débandement des ressorts moléculaires serait le même que le travail consommé par leur compression. De sorte qu'en définitive la consommation de travail dû au choc serait nulle.

98. *Du travail perdu dans le choc des corps imparfaitement élastiques.* — Mais si les corps ne sont qu'imparfaitement élastiques, ce qui est le cas général, ou pour mieux dire, si les flexions et les déformations qu'ils éprouvent pendant le choc dépassent les limites de celles qui peuvent être produites sans que l'élasticité soit altérée, alors les parties choquées restent plus ou moins déformées, et une partie seulement du travail consommé pour produire cette déformation est restituée. Il y a donc perte de travail.

Or, dans les machines à chocs, il arrive presque toujours que soit dès l'origine, soit après quelque temps de service, l'élasticité des parties en contact est plus ou moins altérée, et que la perte de travail par le choc est à peu près la même que celle qui aurait lieu dans le choc de corps mous. Cette dernière quantité est d'ailleurs la limite supérieure que cette perte puisse atteindre.

En résumé, l'on voit que dans les chocs il y a, dans la pratique, toujours une perte plus ou moins grande de travail, due aux déformations des parties en contact, et qu'il convient de substituer, autant que possible, les organes à mouvement continu à ceux qui procèdent par chocs, par intermittences ou par changements brusques dans les vitesses.

99. *Les masses en mouvement peuvent être regardées comme des réservoirs de travail.* — Il suit de tout ce qui précède que les corps, en vertu de leur inertie, absorbent, *emmagasinent* du travail mécanique, quand les forces sont employées à leur communiquer de la vitesse et de la force vive, et transmettent, restituent au contraire du travail, quand leur mouvement se retarde. Sous ce rapport on peut les regarder comme des réservoirs de travail mécanique, qui se remplissent pendant l'accélération, et se vident pendant le retard, absolument à la manière des réservoirs des moteurs hydrauliques.

100. Exemple. — Nous avons déjà vu au n° **94** que c'était en vertu du travail ainsi emmagasiné par l'inertie que les moutons à enfoncer les pilots produisaient leurs effets; il peut en être de même, quel que soit le nombre des organes intermédiaires de la machine : nous trouverons un exemple frappant d'une semblable application dans le *balancier* employé dans un grand nombre d'industries. Si le volant de cette machine est mis en mouvement avec une certaine vitesse, en vertu de l'action d'une force motrice quelconque, puis abandonné à lui-même, il continuera à se mouvoir jusqu'à ce que les frottements et les autres résistances aient entièrement dépensé le travail qu'il avait accumulé sous l'action du moteur. Aussitôt ce travail consommé, il s'arrêtera.

Mais si, pendant qu'elle est encore animée d'une certaine vitesse, témoignant de l'accumulation d'un certain travail, on oppose à la machine une résistance utile, on verra qu'elle est alors capable de développer une action mécanique utilisable, telle, par exemple, que celle de frapper une pièce de monnaie, d'embouter une lame de métal sous une forme donnée, de la percer, etc., etc.

101. *Cas du mouvement périodique.*— Si le mouvement du corps est périodiquement varié, c'est-à-dire si sa vitesse croît et décroît successivement de quantités égales, il est évident, d'après ce qui précède, que le travail consommé dans la période d'accélération est égal au travail résistant pendant le retard, et qu'alors le travail total développé par l'inertie est nul. Dès lors, si l'on s'occupe de ce qui se passe dans des périodes successives, où la vitesse et la force vive redeviennent sans cesse les mêmes à la fin de chaque période, il n'est pas nécessaire de chercher à tenir compte de la force vive.

Nous verrons plus tard la grande importance de l'inertie dans le jeu des machines.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS, DES VITESSES ET DES FORCES.

102. *Composition et décomposition des mouvements simultanés.* — Nous n'avons jusqu'ici considéré que des points matériels animés d'un seul mouvement ou sollicités par une seule force, et avant d'étendre les théorèmes précédents il importe d'examiner ce qui se passe quand un corps ou un point matériel est animé simultanément de plusieurs mouvements ou sollicité par plusieurs forces.

L'observation nous montre en effet que de semblables circonstances se produisent souvent. Ainsi, lorsqu'un voyageur se promène sur le pont d'un bateau à vapeur en marche, il est animé du mouvement de transport général de tous les corps que porte le bâtiment et en outre de celui qu'il s'imprime en long ou en large, vers l'avant ou vers l'arrière, selon sa volonté. S'il tient à la main un corps qu'il lâche en marchant, ce corps, qui participait déjà aux deux mouvements du voyageur, en prend un troisième en tombant sur le pont. De plus, le bateau est emporté dans le mouvement de rotation diurne de la terre, celle-ci a un mouvement de transport autour du soleil, etc.

Tous ces mouvements coexistent, ils ont lieu simultanément et l'observation montre qu'ils sont indépendants les uns des autres, quand les causes qui les produisent le sont aussi.

Par une expérience fort simple due à M. Tresca, sous-directeur du Conservatoire, on rend très-sensible cette indépendance des mouvements simultanés. En plaçant l'appareil chronométrique à cylindre, décrit au n° 80, sur un traîneau animé d'un mouvement de transport uniforme ou même

varié d'une manière quelconque, et en répétant pendant ce mouvement l'expérience de la chute des corps abandonnés à l'action de la pesanteur, on reconnait que la parabole tracée par le style est exactement la même que celle que l'on obtient quand l'appareil est immobile. Le mouvement vertical du corps pesant et le mouvement de rotation du cylindre ont été complétement indépendants du mouvement de transport de l'appareil.

De ce principe de l'indépendance des mouvements simultanés découlent des règles qui permettent de déterminer quel est le mouvement réel, qui résulte de plusieurs mouvements simultanés connus, et que l'on nomme le *mouvement résultant.*

103. *Cas où les mouvements simultanés sont dirigés dans le même sens.* — La première de ces conséquences et la plus évidente d'elle-même c'est que si les mouvements simultanés dont un point matériel est animé sont dirigés suivant la même ligne droite ou courbe, ils s'ajoutent, s'ils sont de même sens, ou se retranchent, s'ils sont de sens contraires.

Dans le cas d'un voyageur marchant sur le pont d'un bâtiment, il est évident en effet que s'il s'avance dans le sens de la marche du bateau, son mouvement, son déplacement par rapport à la rive, supposée parallèle à ces mouvements, sera égal à la somme du déplacement du bateau et du chemin qu'il a lui-même parcouru sur le pont. Si le bateau a avancé de $8^m,00$ pendant que le voyageur en a parcouru 3 vers l'avant, le chemin, le déplacement du voyageur par rapport aux rives sera de $8^m,00+3^m,00=11^m,00$.

S'il marche en sens contraire du mouvement du bateau d'une quantité égale à $5^m,00$, pendant que celui-ci avance de $8^m,00$, son déplacement, ou le chemin qu'il aura parcouru par rapport aux rives sera de

$$8^m,00-5^m,00=3^m,00.$$

Si le voyageur marche vers l'arrière du bâtiment d'une

quantité égale à celle dont celui-ci avance dans le même temps, son déplacement, son chemin parcouru, par rapport aux rives est nul et, bien qu'animé de deux mouvements simultanés, il est resté en repos par rapport aux rives.

Enfin si ce voyageur se déplace sur le pont, vers l'arrière, d'une quantité égale à 10 m. par exemple, et plus grande que le chemin de 8 m. parcouru dans le même temps par le bâtiment, son déplacement par rapport aux rives sera *négatif*, expression qui indique qu'il a reculé au lieu d'avancer, par rapport aux rives.

Il en serait de même de plusieurs mouvements simultanés dirigés suivant la même ligne; en appelant:

E, E', E'', etc., les chemins dirigés, par exemple, de la gauche vers la droite, et les regardant comme *positifs*;

E_1, E'_1, E''_1, etc., les chemins dirigés de la droite vers la gauche, et les regardant comme *négatifs* ou *soustractifs*, le chemin total résultant, de ces mouvements simultanés sera égal à

$$E + E' + E'' - E_1 - E_1' - E_1'', \text{ etc.};$$

ce que l'on exprime en disant que le chemin résultant est la *somme algébrique* de tous les chemins simultanés ou *composants*, en entendant ici par le mot *somme* le résultat de l'opération qui consiste à ajouter tous les chemins parcourus de gauche à droite et à en retrancher tous les chemins parcourus de droite à gauche.

104. *Composition de plusieurs vitesses simultanées dirigées selon la même ligne.* — Tout ce que nous venons de dire pour la composition des chemins ou des espaces simultanément parcourus par un point matériel dans une même direction s'applique aux vitesses simultanées dont le point peut être animé, puisque dans les mouvements uniformes les vitesses sont proportionnelles aux chemins parcourus dans le même temps et que dans les mouvements variés les vitesses sont celles des mouvements uniformes que conserveraient les corps si ces mouvements cessaient de varier.

105. *Composition de deux mouvements dirigés d'une manière quelconque.* — Considérons maintenant un point A, qui soit par exemple la pointe d'un crayon appliquée contre une fausse équerre MAN. Si l'équerre se meut uniformément d'une quantité AB, son côté AM se déplacera parallèlement à lui-même de la même quantité, en se mouvant aussi uniformément, et avec lui la pointe du crayon qui y est appliquée. Mais si dans le même temps T, le crayon se meut sur le côté AM, uniformément, d'une quantité AD, il est facile de voir qu'à la fin du temps T la pointe du crayon sera parvenue au point C, l'un des sommets du parallélogramme construit sur AB et AD comme côtés.

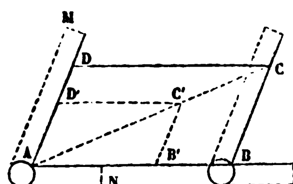


Fig. 24.

En effet, cette pointe constamment appuyée sur le côté AD s'étant déplacée avec lui parallèlement à sa position primitive d'une quantité égale à AB, elle devra se trouver sur la ligne BC menée parallèlement à AD, et comme elle s'est aussi déplacée dans le sens de AM d'une quantité AD, elle devra pareillement se trouver sur la ligne DC menée parallèlement à AB. La rencontre des deux lignes BC et DC détermine la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux chemins simultanés.

D'où il suit que *quand un point matériel est animé de deux mouvements simultanés dans deux directions données, la position occupée par ce point, à la fin de ces deux mouvements, est l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux chemins comme côtés.*

La distance AC, à laquelle le point se trouve alors de sa position primitive A, est dite *le chemin résultant* et les deux chemins simultanés AB et AD s'appellent les chemins composants ou les chemins relatifs, parcourus dans le sens des lignes AN et AM.

Pour deux autres chemins quelconques, mais aussi si-

multanés, AB′ et AD′ parcourus par le point A dans un autre temps T′ le point A arriverait en une position A′ déterminée par l'extrémité de la diagonale AC′ du parallélogramme construit sur les chemins AB′ et AD′.

Or, comme ces seconds chemins simultanés sont par hypothèse parcourus comme les premiers d'un mouvement uniforme on a

$$AB : AB' :: T : T'$$

et

$$AD : AD' :: T : T',$$

d'où

$$AB : AB' :: AD : AD'.$$

Les angles en A étant d'ailleurs égaux, il s'ensuit que les triangles ABC et AB′C′, ADC et AD′C′ sont semblables et que les diagonales AC et AC′ sont dans la même direction.

De plus, les diagonales AC et AC′ sont aussi proportionnelles aux temps T et T′, que le mobile a employés à parvenir aux points C et C′, donc

Quand un point matériel se meut simultanément et uniformément dans deux directions données, le chemin qu'il parcourt en réalité en vertu de ces deux mouvements et qu'on nomme le chemin résultant, est représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux chemins simultanément parcourus, et de plus, son mouvement dans cette direction est uniforme avec une vitesse représentée par le rapport $\frac{AC}{T} = \frac{AC'}{T'}$.

La première proposition (n° 105) nous permettait de déterminer la position occupée par le point par suite de ses deux déplacements simultanés, la seconde nous donne son mouvement réel.

Réciproquement, lorsqu'un point matériel se meut suivant une droite AC, uniformément ou de toute autre façon, l'on peut toujours trouver ses déplacements simultanés par rapport à deux directions données quelconques. Il suffit pour cela de construire le parallélogramme dont la diagonale est

le chemin AC et dont les côtés AB et AD seront parallèles aux directions données.

L'on voit qu'un chemin ou un mouvement donné peut être ainsi décomposé d'un infinité de manières, en deux autres suivant des directions données, tandis que deux chemins ou mouvements donnés ne correspondent qu'à un seul chemin ou mouvement résultant.

On démontrerait de même que si les deux mouvements simultanés du point A selon les directions NA et AM étaient uniformément accélérés, le mouvement résultant suivant la diagonale AC le serait pareillement.

106. ***Mouvement varié.*** — Tout ce que l'on vient de dire, étant indépendant de la grandeur absolue des chemins et des vitesses, reste encore vrai quand ils deviennent infiniment petits.

Ainsi, dans le mouvement curviligne, un élément de chemin infiniment petit AC peut de même se décomposer en deux autres chemins relatifs infiniment petits, parcourus parallèlement à deux axes quelconques donnés dans le même plan; et réciproquement, si l'on connaissait les chemins élémentaires relatifs AB et AD parcourus dans l'élément de temps, dans le sens des axes Ox et Oy, on en déduirait le chemin élémentaire absolu AC parcouru par le corps.

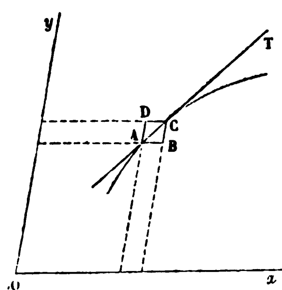


Fig. 25.

On remarquera que ce chemin élémentaire absolu AC est l'élément de la courbe, dont le prolongement donne la tangente AT au point A, et comme sa direction dépend du rapport des chemins relatifs AB et AD, et non pas de leur grandeur, il s'ensuit que, si ce rapport était connu, on pourrait déterminer cette diagonale ou tangente, en construisant sur les directions de AB et AD un parallélogramme

qui précède que le chemin ou la vitesse résultant de deux mouvements simultanés dans deux directions quelconques sera déterminé en construisant le triangle ABC, et menant le côté AC en prenant AB, et BC = AD respectivement égaux aux chemins ou vitesses simultanés et relatifs dans les directions données. Si le corps est en outre animé d'un troisième mouvement ou d'une troisième vitesse AE, on construira le triangle ACF, dans lequel AC est le mouvement ou la vitesse résultant des deux précédents, et CF égal et parallèle à AE. AF sera par conséquent le mouvement ou la vitesse résultant des deux mouvements ou vitesses simultanés AC et AE, ou des trois mouvements ou vitesses AB, AD et AE. De même, pour un quatrième mouvement ou une quatrième vitesse AG, le mouvement ou la vitesse résultant sera donné par le côté AH du triangle AFH, dans lequel AF est la résultante précédente, et FH égal et parallèle à AG. Donc en général *le mouvement ou la vitesse résultant de plusieurs mouvements ou vitesses simultanés contenus dans un même plan sera donné en grandeur et en direction par le dernier côté du polygone* ABCFH, etc., *construit à partir de l'origine* A *avec des côtés égaux* et *parallèles aux mouvements ou vitesses simultanés donnés.*

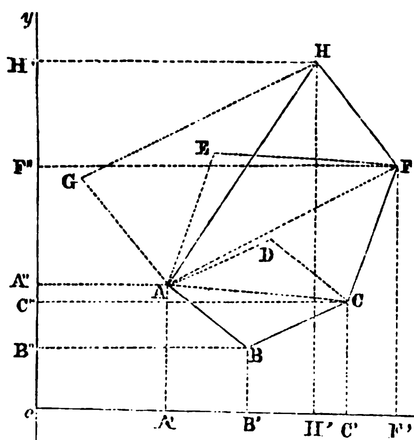


Fig. 27.

Si l'on projette le dernier côté du polygone ainsi construit sur une ligne quelconque par des perpendiculaires ou des lignes parallèles aussi dirigées dans un sens quelconque, la simple inspection de la figure montre que $A'H' = A'B' + B'C' + C'F' - F'H'$, etc.

$$V^2 = AH^2 = AF^2 + FH^2 = AF^2 + AC^2$$
$$= AF^2 + AB^2 + AD^2$$
$$= V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

Ce qui signifie que *la projection du dernier côté ou du chemin résultant, ou de la vitesse résultante, est égale à la somme algébrique des projections des côtés, chemins ou vitesses simultanés.*

On entend ici par somme algébrique le résultat que l'on obtient en ajoutant ou prenant positivement les côtés, chemins ou vitesses, dirigés dans le sens du mouvement réel, et retranchant ou prenant négativement les côtés, chemins ou vitesses dirigés en sens contraire.

Il résulte encore de là que, si le dernier côté du polygone est nul, ou si ce polygone se referme sur lui-même, le chemin résultant ou la vitesse résultante sont nuls, et que le corps ne se déplace pas ou ne reçoit pas de vitesse malgré les mouvements relatifs qui lui sont communiqués. Il en est encore de même quand la somme algébrique des chemins ou des vitesses projetés sur une même droite est nulle.

109. *Résultante de trois mouvements ou de trois vitesses simultanés dans l'espace.* — Si le corps est animé de trois mouvements ou vitesses simultanés AB, AD, AF, dans l'espace, suivant trois directions quelconques, il est évident que, si l'on compose d'abord AB et AD, puis leur résultante AC avec AF, ou AB et AF, et leur résultante AE avec AD, ou AD et AF, et leur résultante AG avec AB, on trouvera dans tous les cas pour résultante finale la diagonale AH du parallélipipède construit sur les mouvements ou vitesses donnés.

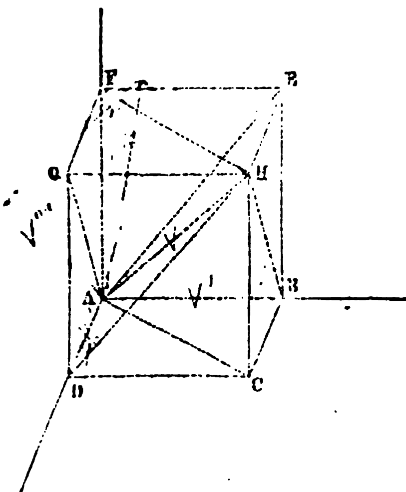


Fig. 28.

Donc, *la résultante de trois mouvements ou de trois vitesses simultanés dans l'espace est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois mouvements.*

110. Réciproquement *un mouvement ou une vitesse quelconque peut être décomposé en trois mouvements ou en trois vitesses suivant trois directions données.* — Soient en effet AH ce chemin parcouru ou cette vitesse, on peut le décomposer en deux autres, l'un dirigé suivant l'une des directions données, l'autre suivant AC dans le plan des deux autres directions, et regarder le corps comme animé de ces deux mouvements ou vitesses simultanés. Puis on peut décomposer le mouvement ou la vitesse AC en deux autres AB et AD dirigés suivant les deux autres directions données.

Le mouvement ou la vitesse AH sera donc ainsi remplacé par les trois mouvements ou vitesses AF, AB et AD selon les ois directions données.

Cas où les composantes sont à angles droits. — Dans le cas particulier et le plus ordinaire où les trois directions sont à angles droits, en posant

$$AB = V', \quad AD = V'', \quad AF = V''' \quad \text{et} \quad AH = V,$$

on a

$$V = \sqrt{V'^2 + V''^2 + V'''^2}$$

et $V' = V \cos BAH$, $V'' = V \cos DAH$, $V''' = V \cos FAH$.

111. *Résultante d'un nombre quelconque de mouvements ou de vitesses simultanés.* — Si, au lieu d'être animé de trois mouvements ou vitesses simultanés AB, AD, AF, le corps en possédait en outre un ou une quatrième, il est facile de voir que le mouvement final ou la vitesse finale résultant serait représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur la résultante des trois premiers mouvements, et sur le quatrième comme côté. Or cette ligne est le dernier côté du contour polyédrique que l'on formerait en supposant que le corps reçût successivement ces mouvements ou vitesses simultanés.

Donc en général *le mouvement ou la vitesse résultant d'un nombre quelconque de mouvements ou de vitesses simultanés dirigés aussi d'une manière quelconque dans l'espace est représenté en grandeur et en direction par le dernier côté du polygone polyédrique qui peut être formé en supposant le corps successivement animé de ces mouvements simultanés.*

Mais on arrive plus simplement à la détermination du mouvement ou de la vitesse résultant en remarquant que, d'après ce qui précède, un mouvement de translation quelconque peut toujours être décomposé en trois autres mouvements simultanés, dirigés selon trois directions données quelconques, qui sont les trois côtés d'un parallélipipède dont le mouvement donné est la diagonale, et qui sont dirigés suivant les directions données.

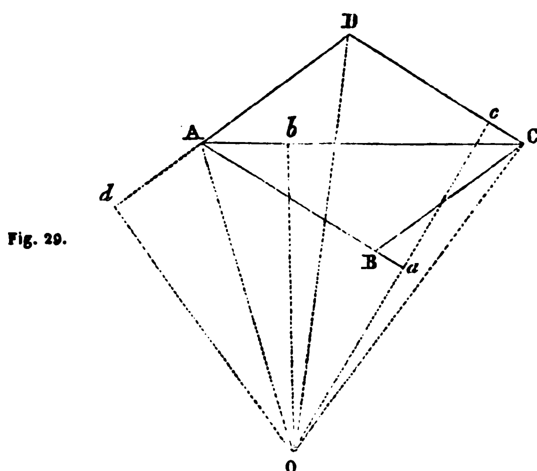
Cela posé, si l'on conçoit chacun des mouvements ou chacune des vitesses simultanés dont le corps est animé ainsi décomposé, le mouvement ou la vitesse finale n'en sera pas altéré. Mais comme tous les mouvements ou vitesses dirigés selon les mêmes axes ont, comme on le verra plus loin, des résultantes partielles égales à la somme des composantes, suivant ces directions, il s'ensuit en définitive que *le mouvement ou la vitesse résultant sera représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les sommes des composantes des mouvements partiels suivant trois directions quelconques.*

Raisonnant encore comme au n° **108**, et supposant qu'après avoir composé en un seul tous les mouvements simultanés qui animent un même point matériel, on projette ces mouvements et le mouvement résultant ou les vitesses correspondantes sur un axe quelconque par autant de plans perpendiculaires à cet axe, on verra avec évidence que la projection du mouvement résultant ou de la vitesse résultante, qui n'est autre chose que la diagonale du polygone polyédrique dont nous avons parlé, est égale à la somme algébrique des projections des mouvements ou vitesses composants.

112. *Cas où la résultante est nulle.* — Lorsque la ligne qui joint les extrémités du premier et du dernier côté du polygone plan ou polyédrique formé sur les directions des chemins ou vitesses composants est nul, ce qui arrive quand ce polygone se referme sur lui-même, le mouvement ou la vitesse résultant est nul.

113. *Théorème des moments de Varignon.*—Si d'un point O quelconque pris dans le plan du parallélogramme ABCD des vitesses, et en dehors de l'angle BAD, on mène les droites OA,

Fig. 29.



OD et OC, on remarquera d'abord que, le quadrilatère OADC étant la somme des triangles OAD et ODC, on aura

$$OAC = OAD + ODC - ADC.$$

Si de plus on abaisse du point O les perpendiculaires O*a* ou O*c*, O*b* et O*d*, sur les côtés AB, AC et AD, on aura pour les surfaces des triangles

$$OAC = \frac{1}{2} AC \times Ob, \quad OAD = \frac{1}{2} AD \times Od,$$

$$ODC = \frac{1}{2} DC \times Oc, \quad ADC = \frac{1}{2} DC \times ac.$$

$$\frac{1}{2} AC \times Ob = \frac{1}{2} AD \times Od + \frac{1}{2} Dc \times Oc - \frac{1}{2} DC \times ac$$

$$Ac \times Ob = AD \times Od + Dc(Oc - ac)$$

$$= AD \times Od + AB \times Oa.$$

$$Dc(Oc - ac) = -AB \times Oa.$$

Par conséquent la relation ci-dessus devient

$$AC \times Ob = AD \times Od + AB \times Oa.$$

Les produits $AC \times Ob$, $AD \times Od$, $AB \times Oa$, des côtés AC, AD, AB, par les perpendiculaires Ob, Od, Oa, abaissées du point O sur leurs directions respectives, s'appellent les *moments*, et la relation ci-dessus montre que si l'on applique ce qui précède aux mouvements composants et résultants d'un point A, on peut énoncer le théorème en disant que le *moment de la diagonale ou de la résultante est égal à la somme des moments des côtés ou des composantes.*

Dans le cas de la figure précédente, le corps, en vertu de ses deux mouvements ou vitesses, était sollicité à tour-

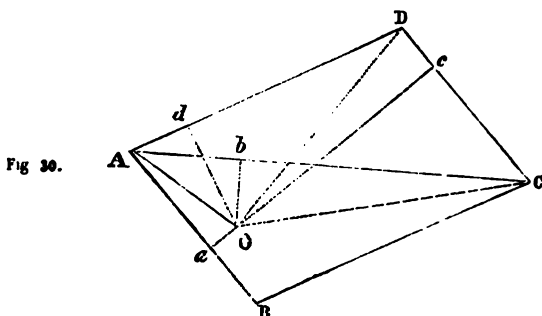


Fig 30.

ner dans le même sens autour du point O, placé en dehors de l'angle BAD.

Si le point O se trouvait dans l'intérieur de cet angle, il est facile de voir que l'on aurait encore

$$OAC = OAD + ODC - ADC,$$

puis $\quad OAC = \frac{1}{2} AC \times Ob, \quad OAD = \frac{1}{2} AD \times Od,$

$$ODC = \frac{1}{2} DC \times Oc, \quad ADC = \frac{1}{2} DC \times ac,$$

et par suite

$$AC \times Ob = AD \times Od - AB \times Oa.$$

Et comme dans ce cas le corps, en vertu de ses deux mou-

vements, tend à tourner dans des sens contraires autour du point O, le théorème de Varignon peut s'énoncer en général, et en l'étendant de suite à un nombre quelconque de mouvements ou de vitesses simultanés, en disant que *le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes qui tendent à faire tourner le corps dans un sens moins la somme des moments des composantes qui tendent à le faire tourner en sens contraire*, ou plus généralement en disant que *le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes*, pourvu que, prenant positivement les moments relatifs à un certain sens du mouvement, on convienne de prendre négativement ceux qui se rapportent au sens contraire.

114. *Extension de ces théorèmes aux corps ou systèmes matériels animés d'un mouvement commun de translation.* — Tout ce que l'on a dit plus haut pour un point matériel s'étend immédiatement aux corps ou systèmes matériels animés d'un mouvement de translation commun, puisque, quand on aura déterminé la vitesse ou le mouvement résultant de l'un des points, on en déduira celui des autres, qui est le même. Car si tous ces points sont animés simultanément d'un ou plusieurs mouvements communs, d'une ou de plusieurs vitesses communes dans des directions données, le mouvement résultant ou la vitesse résultante sera le même pour tous.

115. *Indépendance de l'action simultanée de plusieurs forces sur un même point.* — Des observations qui montrent qu'un point matériel peut être animé de plusieurs mouvements ou vitesses simultanés et indépendants, il suit aussi naturellement que les causes ou les forces qui produisent ces mouvements ou impriment ces vitesses exercent des actions indépendantes les unes des autres. Aussi l'expérience montre-t-elle que, quand un corps est soumis à l'action de plusieurs forces, chacune d'elles lui communique dans un élément de temps t, et dans sa direction propre, un petit

Newton's second Law of Motion.

Ce qui exprime que le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes, lesquels peuvent d'ailleurs être des travaux moteurs ou des travaux résistants (n° **93**).

Enfin, pour que le mouvement du corps soit uniforme, il faut que la somme des forces qui tendent à lui imprimer de la vitesse dans un sens, soit égale à celle des forces qui tendent à lui en imprimer dans le sens contraire, ce qui conduit à la relation

$$R = F + F' + F'', \text{ etc.} = o,$$

ou

$$Re = Fe + F'e + F''e, \text{ etc.} = o,$$

ce qui exprime que la résultante est nulle ou que le travail des forces motrices est égal à celui des forces résistantes.

L'équilibre n'étant que le cas particulier du mouvement uniforme où la vitesse est nulle, la condition précédente est aussi celle de l'équilibre.

117. *Cas où les forces qui sollicitent le corps n'ont pas la même direction.* — Nous avons vu par l'exemple du n° **100**, relatif à la chute des graves animés en même temps d'un mouvement horizontal, que les vitesses communiquées dans des directions différentes étaient aussi complétement indépendantes les unes des autres.

En obéissant ainsi à l'action simultanée de ces forces, le corps recevra des vitesses Ab, Ad, proportionnelles à leurs intensités et dans la direction des forces, et ces vitesses composantes auront une résultante qui sera la diagonale Ac du parallélogramme Abcd.

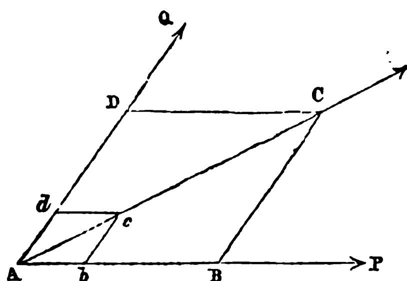


Fig. 31.

Si l'on prend AB et AD proportionnels aux degrés de vi-

tesse A*b*, A*d*, pour représenter les forces P et Q, qui produisent ces petits degrés de vitesse, la résultante de ces forces, à laquelle est due la vitesse résultante, devra être proportionnelle au degré de vitesse communiqué dans le même temps et dans le sens de son action, ou à A*c*; on aura donc

$$P:AB::R:AC,$$

Donc la résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AC du parallélogramme ABCD.

Donc *la résultante de deux forces qui agissent simultanément sur un même corps est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.* Réciproquement *toute force peut être décomposée en deux autres, suivant deux directions arbitraires, et égales aux côtés du parallélogramme dont la force donnée serait la diagonale et dont les côtés seraient des parallèles aux directions données.*

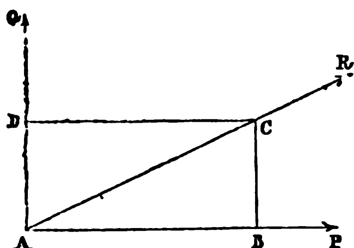


Fig 32.

Si les deux directions données sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a

$$R^2=P^2+Q^2,$$

$$P=R\frac{AB}{AC}=R\cos CAB,\quad Q=R\frac{AD}{AC}=R\cos CAD.$$

118. *Quantité de travail d'une force dont le point d'application ne se meut point dans sa direction propre.* — Lorsqu'une force R n'agit pas dans la direction du chemin parcouru par son point d'application, on peut la décomposer en deux : l'une, P, représentée par AB, dirigée dans

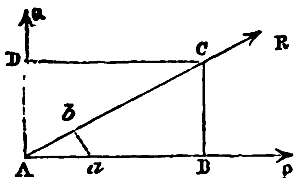


Fig. 33.

le sens de ce chemin; l'autre, Q, représentée par AD, perpendiculaire à ce chemin. Le travail de P sera $P \times Aa$ en désignant par Aa le chemin réellement parcouru, et le travail de Q sera nul, puisqu'il n'y a pas de chemin parcouru dans sa direction propre. Donc le travail de la force R se réduira à celui de sa composante P. Mais en abaissant ab perpendiculaire sur AC, on a par les triangles semblables ACB et Aab

$$R:P::Aa:Ab, \text{ d'où } R.Ab = P.Aa.$$

Par conséquent le travail de la force R peut être mesuré soit par celui de sa composante P dans le sens du chemin parcouru, soit par le produit de son intensité R et de la projection Ab du chemin Aa sur sa direction propre.

119. *Application du théorème de Varignon aux forces.* — Puisque la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces comme côtés, il s'ensuit que le théorème de pure géométrie de Varignon s'applique aux forces comme aux lignes, et que par conséquent

La résultante de deux ou d'un nombre quelconque de forces agissant dans le même plan a pour moment, par rapport à un point quelconque de ce plan, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans l'autre sens.

Ce qui s'exprime par la relation

$$Rr = Pp + P'p' + \text{etc.} - Qq - Q'q' - \text{etc.},$$

en nommant :

P, P', ... les forces qui tendent à faire tourner le corps dans un sens et p, p', ... les bras de levier respectifs de ces forces;

Q, Q', ... les forces qui tendent à faire tourner le corps dans l'autre sens, et q, q', ... les bras de levier respectifs de ces forces;

R la résultante et r son bras de levier.

120. ***Le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces est égal à la somme ou à la différence des quantités de travail qu'elles développent.*** — Dans le cas, le plus simple de tous, où les forces agissant toutes dans la direction du chemin parcouru, la résultante de toutes les forces est évidemment égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et comme le chemin parcouru par leurs points d'application est le même, la proposition est évidente.

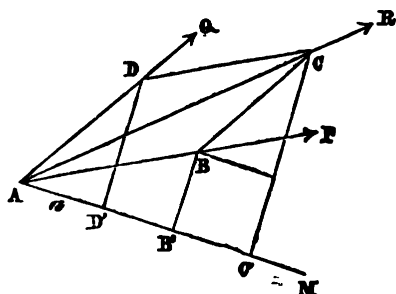


Fig. 34.

121. *Forces agissant dans des directions quelconques.* — Si l'on considère d'abord deux forces P et Q et leur résultante R, respectivement proportionnelles aux longueurs AB, AD et AC, soit AM la direction du chemin parcouru, projetons ou décomposons P, Q et R, suivant cette direction; nous aurons

$$AB'=P', \ AD'=Q', \ AC'=R',$$

pour les composantes dans le sens du chemin quelconque parcouru Aa par exemple, et le travail de ces composantes, qui est égal à celui des forces primitives P, Q et R, sera respectivement $P'.Aa$, $Q'.Aa$, $R'.Aa$. Or il est évident d'après la figure 34 que

$$AC'=R'=AB'+B'C'=P'+Q'.$$

Donc dans le cas de cette figure

$$R'.Aa=P'.Aa+Q'.Aa.$$

Dans le cas de la figure 35 on a

$$AC'=R'=AB'-AD'=P'-Q',$$

et par suite

$$R'.Aa=P'.Aa-Q'.Aa.$$

La différence des deux résultats provient de ce que dans le premier les forces P et Q agissent toutes deux dans le sens du chemin parcouru, tandis que dans le second la force Q agit en sens contraire de ce chemin et donne lieu à un travail résistant.

Cela résulte d'ailleurs avec évidence de ce que la projection de la résultante est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur une ligne quelconque, pour laquelle on peut prendre la direction du chemin réellement parcouru, et qu'en multipliant les deux membres de cette égalité par le chemin parcouru, elle exprime le théorème général suivant :

Quand un point matériel est sollicité par un nombre quelconque de forces situées dans le même plan, qui tendent à lui imprimer ou lui impriment un mouvement de transport, le travail développé par la résultante est égal à la somme des quantités de travail des forces qui sollicitent le corps dans le sens du chemin parcouru, moins la somme des quantités de travail des forces qui le sollicitent en sens contraire.

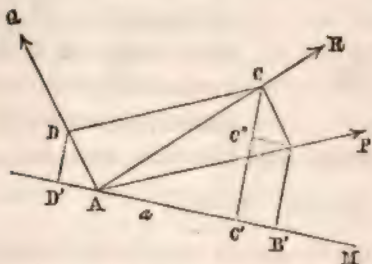


Fig. 35.

Sans entrer dans des développements théoriques que ne comporte pas l'objet spécial de notre enseignement, nous nous bornerons à dire que des raisonnements analogues s'appliqueraient au cas de plusieurs forces agissant sur un même corps dans des directions quelconques dans l'espace.

Le travail élémentaire étant la même chose que ce que l'on nomme le *moment virtuel*, l'énoncé ci-dessus revient à dire que *la somme des moments virtuels des composantes, pris avec le signe convenable, est égale au moment virtuel de la résultante; ce qui est le principe connu des vitesses virtuelles.*

Virtual velocity the same as
Element of work.

La différence des deux résultats provient de ce que dans le premier les forces P et Q agissent toutes deux dans le sens du chemin parcouru, tandis que dans le second la force Q agit en sens contraire de ce chemin et donne lieu à un travail résistant.

Cela résulte d'ailleurs avec évidence de ce que la projection de la résultante est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur une ligne quelconque, pour laquelle on peut prendre la direction du chemin réellement parcouru, et qu'en multipliant les deux membres de cette égalité par le chemin parcouru, elle exprime le théorème général suivant :

Quand un point matériel est sollicité par un nombre quelconque de forces situées dans le même plan, qui tendent à lui imprimer ou lui impriment un mouvement de transport, le travail développé par la résultante est égal à la somme des quantités de travail des forces qui sollicitent le corps dans le sens du chemin parcouru, moins la somme des quantités de travail des forces qui le sollicitent en sens contraire.

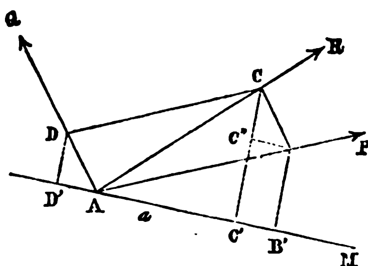


Fig. 35.

Sans entrer dans des développements théoriques que ne comporte pas l'objet spécial de notre enseignement, nous nous bornerons à dire que des raisonnements analogues s'appliqueraient au cas de plusieurs forces agissant sur un même corps dans des directions quelconques dans l'espace.

Le travail élémentaire étant la même chose que ce que l'on nomme le *moment virtuel*, l'énoncé ci-dessus revient à dire que *la somme des moments virtuels des composantes, pris avec le signe convenable, est égale au moment virtuel de la résultante; ce qui est le principe connu des vitesses virtuelles.*

Virtual velocity the same as
Element of work.

Connexion between Statics
and Dynamics. One a peculiar
case of the other.

122. ***Cas où le point matériel tend à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe.*** — Si le point O d'où l'on abaisse les perpendiculaires sur les directions des deux forces P et Q (fig. 36) est la projection de l'axe de rotation, ou le point autour duquel le plan des forces et le corps tendent à tourner, la relation des moments (n° 113)

$$R \times Ob = P.Oa \pm Q.Oc \text{ ou } R.r = Pp \pm Qq,$$

en faisant $Ob = r$, $Oa = p$ et $OC = q$,

devient, en multipliant tous les termes par l'arc a_1 décrit à l'unité de distance,

$$Rra_1 = Ppa_1 \pm Qqa_1.$$

Or ra_1, pa_1, qa_1, sont respectivement les arcs élémentaires ou finis décrits par les pieds des perpendiculaires, ou les chemins parcourus par les points d'application des forces R, P et Q, dans leur direction propre, et par conséquent Rra_1, Ppa_1, Qqa_1, sont les quantités de travail respectivement développées par ces forces, et la relation ci-dessus démontre pour le mouvement de rotation la proposition établie déjà pour le mouvement de translation.

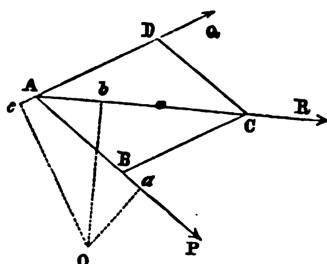


Fig. 36.

123. *Condition du mouvement uniforme ou de l'équilibre.*

Cas où toutes les forces sont contenues dans le même plan. — Si le point matériel que l'on considère n'est sollicité que par des forces situées dans le même plan, il restera dans ce plan, et il ne pourra d'ailleurs à un instant quelconque obéir qu'à un mouvement de translation ou à un mouvement de rotation, ou à ces deux mouvements à la fois.

Tout mouvement de translation du corps pouvant, d'après ce que l'on a vu, être décomposé en deux autres, selon deux

directions quelconques prises dans ce plan, le mouvement réel du point matériel sera uniforme si les deux mouvements relatifs ou composants le sont. Donc la condition de l'uniformité du mouvement de translation revient à celle de l'uniformité du mouvement suivant deux directions données. Cette dernière sera satisfaite si les forces qui sollicitent le point matériel, ou leurs composantes dans le sens de chaque axe, qui agissent pour accélérer son mouvement, développent un travail égal à celui des forces qui tendent à retarder ce mouvement; ce qui revient à dire que *la somme des composantes qui agissent dans un sens doit être égale à la somme de celles qui agissent dans un sens contraire*, *ou que la somme totale doit être nulle*, selon la convention établie précédemment.

Donc *le mouvement de translation d'un point matériel sera uniforme lorsque les sommes respectives des composantes des forces qui le sollicitent selon deux directions quelconques prises dans ce plan seront séparément égales à zéro.*

L'équilibre n'étant que le cas particulier du mouvement uniforme où la vitesse est nulle, la même condition sera celle de l'équilibre quant à la translation.

Pour le mouvement de rotation, il est évident que, si toutes les forces qui agissent dans le sens du mouvement et tendent à l'accélérer développent un travail égal à celui des forces qui agissent en sens contraire et tendent à retarder le mouvement, celui-ci restera uniforme et le travail résultant sera nul, ce qui revient à dire que pour *l'uniformité du mouvement de rotation il faut et il suffit que la somme des quantités de travail ou celle des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens soit égale à la somme des quantités de travail ou des moments de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.*

L'équilibre n'étant que le cas particulier du mouvement uniforme où la vitesse est nulle, les mêmes conditions seront celles de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces situées dans un plan.

124. *Cas où les forces agissent d'une manière quelconque dans l'espace.* — Le mouvement le plus général qu'un corps puisse prendre se compose d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation autour d'un point quelconque; or, quant au mouvement de translation, il est encore évident qu'il sera uniforme si les trois mouvements parallèles à troix axes quelconques perpendiculaires entre eux, dans lesquels on peut toujours le concevoir décomposé, sont uniformes, ce qui conduit à la condition que les sommes des quantités de travail développées dans chacune des directions des axes soient séparément nulles.

Quant au mouvement de rotation, remarquons d'abord que dans le cas le plus général, le centre autour duquel le mouvement de rotation s'effectue peut varier à chaque instant, ce qui lui fait alors donner le nom de *centre instantané de rotation.* Cela posé, il est évident que la rotation autour d'un centre quelconque peut être décomposée en trois rotations, autour de trois axes parallèles aux précédents, et passant par le centre instantané de rotation, pour le moment que l'on considère. Dès lors aussi le mouvement résultant de rotation sera uniforme, si les mouvements composants le sont. La rotation autour de chacun de ces axes n'étant due qu'aux composantes perpendiculaires à cet axe, l'uniformité du mouvement aura lieu si les sommes des moments des composantes des forces respectivement parallèles à deux des axes pris par rapport au troisième sont séparément nulles, ce qui conduit à trois relations entre les moments qu'il faut successivement prendre par rapport à chacun des axes.

Les conditions générales de l'uniformité du mouvement d'un point matériel sollicité par des forces extérieures quelconques se réduisent donc aux suivantes :

1° *Les quantités de travail développées par ces forces dans le sens de trois axes rectangulaires quelconques, ou les sommes des composantes dans le sens de ces axes, doivent être nulles.*

2° *Les sommes des moments des forces données par rapport à ces trois axes doivent être séparément nulles.*

L'équilibre n'étant que le cas particulier du mouvement uniforme où la vitesse est nulle, ces conditions sont aussi celles de l'équilibre des forces.

La discussion précédente montre que l'étude des mouvements produits par des forces quelconques peut toujours être ramenée à celle du mouvement de translation dans le sens des forces ou de leurs composantes, et du mouvement de rotation autour d'un axe donné. Nous avons déjà examiné le premier de ces mouvements, il nous reste à nous occuper du second; mais auparavant il convient d'étendre les théorèmes de la composition des forces au cas où elles sont parallèles.

125. *Forces parallèles.* — L'on a vu au n° **108** que la projection de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel, sur une droite quelconque est égale à la somme algébrique des projections de ces forces sur cette même droite. La démonstration de cette proposition étant complétement indépendante des directions des forces et des angles qu'elles forment entre elles et avec leur résultante il en résulte qu'elle est encore vraie quand on fait la projection sur la résultante elle-même, d'où il suit : *que la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, est égale à la somme algébrique des projections de ces forces sur sa direction propre.* C'est d'ailleurs ce qu'il est facile de voir directement. La figure 37 montre en effet que l'on a

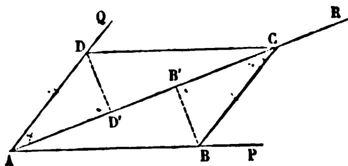


Fig. 37.

$$\text{AC} \quad \text{ou} \quad \text{R} = \text{CD}' + \text{D}'\text{A} = \text{AB}' + \text{AD}'$$

ou

$$\text{R} = \text{P}' + \text{Q}'$$

$AD' = B'C$. Euclid Bk. I. Prop. 26.

add $D'B'$ to each.

then $AD' + D'B' = B'C + D'B'$

therefore $AB' = CD'$.

$D'C = AB'$ therefore $D'A + AC = AC + CB'$
therefore $D'A = CB'$

en nommant P′ la projection AB′ de AB ou P′ sur AC, et Q′ la projection AD′ de AB ou Q sur AC.

Les projections P′ et Q′ des forces P et Q sur la direction de la résultante sont d'ailleurs évidemment les composantes de ces forces dans le sens de cette résultante.

Dans le cas où l'angle formé par les directions des forces P et Q serait obtus, il est facile de voir que la proposition du n° 108 subsiste et que celle que nous venons d'établir se modifie en ce sens que la résultante est alors égale à la différence des projections de ses composantes. On voit tout de suite en effet sur la figure que

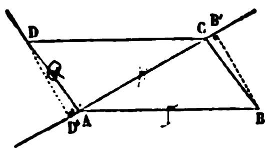


Fig. 38.

$$AC \quad \text{ou} \quad R = AB' - CB' = AB' - AD' = P' - Q'.$$

126. *Conséquences relatives à la composition des forces parallèles.* — Les deux propositions précédentes sont tout à fait indépendantes de la grandeur des angles BAC et DAC, ou de la direction des forces P et Q ; elles ne cessent pas d'être vraies à mesure que le point A de concours des forces s'éloigne de plus en plus et quand, ces forces devenant parallèles, il se trouve à l'infini. On a alors pour deux forces parallèles, dans le premier cas où elles agissent dans le même sens,

$$R = P + Q$$

et pour le second cas où elles agissent en sens contraires,

$$R = P - Q.$$

127. *Point d'application de la résultante des forces parallèles.* — Le théorème des moments (n° 119) démontré pour un point quelconque autour duquel les forces tendraient à produire la rotation, étant pareillement indépendant de la direction des forces, il est vrai aussi pour le cas où elles sont parallèles, d'où il suit, d'abord, que le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles situées

dans un même plan par rapport à un point quelconque pris dans ce plan est égal à la somme algébrique des moments de ces forces, ce qui fournit un moyen de déterminer la position de la résultante.

Soient par exemple deux forces parallèles P et Q agissant dans le même sens. La proposition précédente devient

$$Rr = Pp \pm Qq$$

et l'on a d'ailleurs $\quad R = P + Q.$

Si l'on prend pour centre des moments un point de la résultante elle-même on a évidemment $r = o$ et $Rr = o$, et par suite $Pp \pm Qq = o$, ce qui ne peut être qu'autant que l'on a $Pp = Qq$ et que les forces P et Q dirigées dans le même sens tendent à produire la rotation par rapport au point choisi pour centre des moments dans des sens contraires. Donc, ce point et la résultante elle-même sont compris entre les directions des forces P et Q, et toutes les droites perpendiculaires à la résultante et aux deux forces, sont partagées en parties réciproquement proportionnelles à ces forces; ce qui est exprimé par la relation $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$. Il en est de même de toute sécante menée entre les directions des forces P et Q; quels que soient les points d'application A et B de ces forces l'on voit que la résultante de ces forces coupe aussi cette ligne en parties réciproquement proportionnelles à leurs intensités. On a d'ailleurs, d'après la figure, en nommant d la distance des directions de P et de Q

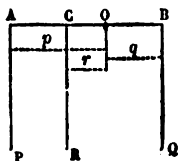


Fig. 89.

$$d = p + q$$

d'où $\quad q = d - p$ et $Pp = Q(d - p)$;

par suite $\quad (P + Q)\,p = Qd$

d'où $\quad p = \frac{Qd}{P+Q}.$

Since $Pp = Qq$.

Dans le cas où les forces P et Q sont dirigées en sens contraires,

$$R = P - Q$$

et l'on a la relation

$$Rr = Pp - Qq = o.$$

Or, pour que, dans ce cas, les forces P et Q qui sont de sens contraires, puissent produire la rotation en sens opposés par rapport à un point de la résultante, il faut que ce point et la résultante elle-même soient en dehors des deux directions des forces. Si l'on appelle d la distance de ces deux directions l'on a par les relations ci-dessus $d = q - p$ d'où $q = p + d$ et

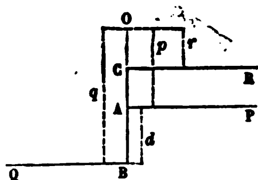


Fig. 40.

$$Pp = Qp + Qd \text{ ou } (P - Q)p = Qd$$

d'où

$$p = \frac{Qd}{P - Q},$$

ce qui donne la distance de la résultante à la direction de la force P et par suite sa position.

Si les points d'application des forces P et Q sont en A et B, la résultante coupe la droite AB prolongée en un point C tel que ses distances p et q aux directions des forces P et Q sont réciproquement proportionnelles à ces forces.

128. ***Réciproquement toute force donnée peut être décomposée en deux autres forces parallèles agissant en des points donnés.*** — Soit en effet une force R agissant en un point donné C, d'une droite supposée rigide et inflexible, il sera toujours facile de trouver les valeurs de deux autres forces P et Q agissant à des points donnés A et B, dont les distances P et Q à la direction CR de la force R, produisent le même effet que cette force. Il suffira de les déterminer de manière que l'on ait en même temps

$P + Q = R$ si elles doivent agir l'une à droite et l'autre à gauche de R,

$P - Q = R$ si les points A et B sont tous deux du même côté de R, et dans les deux cas

$$Pp = Qq \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{p}{q} P.$$

Ces deux relations donneront

$$P\left(1 + \frac{p}{q}\right) = R \quad \text{d'où} \quad P = \frac{q}{p+q} R = \frac{q}{d} R,$$

d étant la distance des deux directions données;

ou $$P\left(1 - \frac{p}{q}\right) = R \quad \text{d'où} \quad P = \frac{q}{p-q} R.$$

Ce qui indique que la force P agit en sens contraire de R.

Les deux forces P et Q ainsi déterminées ont une résultante unique précisément égale à R et peuvent par conséquent remplacer cette force puisqu'elles développent le même travail.

Cette décomposition d'une force en deux autres parallèles agissant en des points donnés trouve de fréquentes applications dans la pratique.

Quand par exemple l'on veut déterminer la pression qu'une poutre, qu'un arbre de roue hydraulique, d'un poids connu ou chargé d'un poids donné, exerce sur ses points d'appui on est conduit à une décomposition de ce genre.

Soit ainsi une poutre chargée en un point C de sa longueur $2c$, d'un poids $2P$, et reposant sur deux points d'appui A et B situés aux distances l' et l'' du point C. En appelant

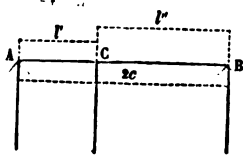


Fig. 41.

P' et P'' les deux pressions ou composantes cherchées, observant que

$P' + P'' = 2P$ et en prenant les moments de la résultante

If $\ell' = \ell''$

$$P' = P'' = \frac{2P}{2} = P.$$

or each of the supports bear half the weight in the middle.

et des composantes alternativement par rapport aux points d'appui A et B, on a dans le premier cas,

$$P'' \times 2c = 2P \times l' \quad \text{d'où} \quad P'' = \frac{Pl'}{c},$$

dans le second,

$$P' \times 2c = 2P \times l'' \quad \text{d'où} \quad P' = \frac{Pl}{c}.$$

S'il s'agissait d'une roue hydraulique ces deux composantes P' et P'' seraient les pressions exercées par ses tourillons sur leurs coussinets en vertu de la force 2P.

En décomposant ainsi toutes les forces qui agissent sur l'axe y compris le poids propre de la roue et de son arbre, on aurait sur chaque tourillon un groupe de forces concourantes dont la résultante partielle donnerait la pression totale exercée sur chaque coussinet.

129. *Extension des théorèmes précédents à un nombre quelconque de forces parallèles comprises ou non comprises dans un même plan.* — Les théorèmes précédents peuvent s'étendre à un nombre quelconque de forces parallèles en composant de proche en proche la résultante des deux premières avec une troisième, et ainsi de suite; d'où l'on conclut :

1° *Que la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles est égale à la somme de celles qui agissent dans un sens moins la somme de celles qui agissent en sens contraire;*

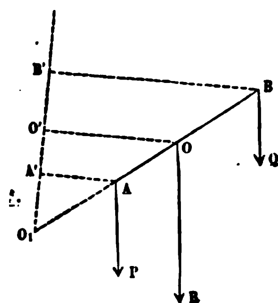


Fig. 42.

2° *Que, si les forces sont dans un même plan, le moment de la résultante par rapport à un point quelconque pris dans le plan qui contient toutes les forces, est égal à la somme ou à la différence des moments des composantes.*

3° De même, si des points d'application A, B et O, des forces P, Q, et de leur résultante R, on abaisse des perpendiculaires AA', BB', OO', sur un plan quelconque, et qu'on nomme O_1 le point de

rencontre de la ligne AB avec ce plan, point qui se trouvera nécessairement sur l'intersection du plan ABB'A' qui contient les perpendiculaires avec le plan donné, il est facile de voir que de la relation déjà démontrée

$$R.OO_1 = P.AO_1 + Q.BO_1,$$

on déduira :

$$R.OO' = P.AA' + Q.BB',$$

c'est-à-dire que *le moment de la résultante par rapport à un plan quelconque est égal à la somme ou à la différence des moments des composantes.*

En considérant les forces deux à deux, ce théorème s'étend aussi au cas où elles sont en nombre quelconque et contenues dans des plans différents.

130. *Travail de la résultante de plusieurs forces parallèles.* — Si les forces parallèles que l'on considère sont appliquées à différents points d'un même corps et que ce corps soit animé seulement d'un mouvement de translation, le chemin parcouru par tous les points d'application des forces est le même, et en multipliant tous les termes de la relation

$$R = P + Q - S - T + \text{etc.}$$

par ce chemin parcouru, il sera évident que *le travail de la résultante est égal à la somme des quantités de travail développées par les composantes;* ce qui résulte d'ailleurs du théorème du n° **120.**

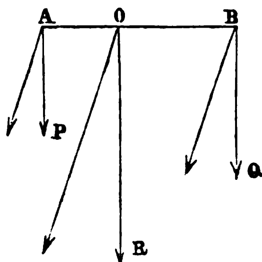


Fig. 43.

Si le corps tourne autour d'un axe fixe, la même proposition démontrée pour des forces quelconques, s'établit d'une manière analogue pour des forces parallèles.

131. *Centre des forces parallèles.* — Le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles qui agissent sur un corps ne dépend, comme on l'a

portent à leurs extrémités des couteaux aussi en acier ou en agate, dont le tranchant émoussé est en dessus, et sur lesquels viennent reposer des coussinets disposés à la partie supérieure de la suspension des plateaux dans lesquels on met les poids ou les corps à peser. Perpendiculairement au fléau, et directement au-dessus ou au-dessous de l'axe, on dispose habituellement une aiguille plus ou moins longue qui, en s'inclinant avec le fléau, indique, sur un limbe fixe gradué, l'inclinaison plus ou moins grande du fléau. La balance n'est en équilibre que quand cette aiguille est verticale ou correspond au zéro du limbe.

Malgré la simplicité de sa disposition générale, la balance est un instrument difficile à construire quand on veut satisfaire aussi exactement que possible aux exigences d'une grande précision. Les conditions à satisfaire sont les suivantes :

1° La balance doit être en équilibre quand elle n'est pas chargée, ce qui exige que les deux branches ou bras du fléau soient eux-mêmes en équilibre ; la longueur des bras, mesurés depuis les couteaux de l'axe jusqu'aux couteaux de suspension des plateaux, doit être la même, afin que les plateaux, de poids égaux, puissent sans inconvénient être changés de côté.

2° La balance doit être *sensible* à un degré donné, selon l'emploi que l'on en veut faire. Ainsi les balances de précision, destinées à peser des poids de 5, de 10 et même de 20 kilogrammes, doivent accuser des différences de poids d'un milligramme au plus, et le degré de précision doit être au moins le même pour tous les poids, depuis les plus faibles jusqu'aux plus grands, que la balance est destinée à peser.

Ces conditions ne peuvent être satisfaites que par de grands soins dans la construction et l'application exacte de certains principes faciles à établir.

Il faut d'abord que l'arête inférieure des couteaux de l'axe et les arêtes supérieures des couteaux des bras soient paral-

lèles et dans un même plan, et de plus que le centre de gravité du fléau, et par suite celui de la balance entière soient toujours au-dessous, mais très-près de l'arête des couteaux de l'axe.

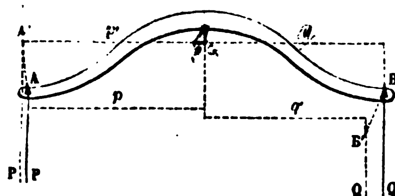


Fig. 44.

Considérons en effet une balance dans laquelle ces conditions ne sont pas satisfaites, et supposons-la d'abord en équilibre. Soient :

P le poids du corps à peser, mis dans le plateau de gauche,

Q le nombre de kilogrammes et de grammes qui, mis dans le plateau de droite, établit l'équilibre,

p et q les bras de levier des poids P et Q, au moment de l'équilibre ; on aura à ce moment

$Pp = Qq$; et si $p = q$, comme cela doit être, $P = Q$. Appelons

M le poids du fléau de la balance agissant à son centre de gravité G, supposé au-dessous de l'axe du fléau,

m le poids qui, placé dans le plateau de droite, fait trébucher, incliner le fléau, et l'amène à la position voisine de l'équilibre A'OB'.

Soient dans cette position

p' et q' les nouveaux bras de levier, alors inégaux, des forces P et Q, qui, dans le cas de la figure, satisfont à la condition $p' > q'$.

g le bras de levier du poids M du fléau.

Dans cette nouvelle position d'équilibre, la condition d'égalité des moments sera exprimée par la relation

$$Pp' + Mg = (Q + m)q' ;$$

Posons $p' = q' + p_1$.

On a alors $\quad (P - Q)q' + Pp_1 + Mg = mq'$;

$$Mg = Rg = (Q + n)q' - pp'$$

$$p(q' + p') + Ng = (Q + m)q'$$

d'où l'on tire, pour la valeur du poids qui fait incliner le fléau et le maintient dans cette nouvelle position,

$$m = (P - Q) + \frac{Mg}{q'} + \frac{Pp_1}{q'}.$$

Pour que m pût être égal à zéro, il faudrait que l'on eût toujours $p_1 = o$ ou $p' = q'$, et $g = o$.

La première de ces conditions ne peut être satisfaite qu'autant que tous les couteaux sont dans le même plan, parce qu'alors il est facile de voir par la figure que l'on a toujours $p = q$ et $p' = q'$ dans toutes les positions, ce qui montre la nécessité de se conformer à cette règle de construction.

L'on ne pourrait rendre $\frac{Mg}{q'} = o$ qu'en faisant $g = o$, c'est-à-dire en faisant en sorte que le centre de gravité du fléau se trouve sur l'arête des couteaux ; mais alors le fléau et les plateaux seraient également en équilibre sous toutes les inclinaisons, et il en serait de même pour tous les cas où l'on aurait $P = Q$. La balance serait ce qu'on nomme *indifférente*, elle n'aurait pas de position d'équilibre marquée et déterminée.

On renonce donc à satisfaire tout à fait à cette condition ; mais, afin que la balance s'incline sous le plus petit poids additionnel m, dans le cas où $P = Q$, on rend la distance du centre de gravité à l'axe du fléau assez petite pour que, sous une inclinaison donnée sur le limbe, d'un demi-degré, par exemple, le bras de levier g du poids du fléau soit tel que le poids m qui produit cette inclinaison soit d'un milligramme ou d'un demi-milligramme.

Ce résultat est indépendant de la grandeur des poids P et Q, de sorte que la balance est sensible à l'addition d'un demi-milligramme, pour tous les poids qu'elle est destinée à peser, depuis les plus faibles jusqu'aux plus forts.

Les artistes sont parvenus à atteindre cette perfection à force de soins. M. Fortin a fait des balances pesant 1 kilo-

gramme à 1 milligramme près. Le Conservatoire des arts et métiers possède une collection précieuse de balances dans laquelle on remarque deux balances, l'une de Fortin, l'autre de Gambey, pesant le kilogramme à un milligramme près, une balance de M. Deleuil pesant 10 kilogrammes à $\frac{1}{2}$ milligramme près, et une balance donnée par le gouvernement des États-Unis, pesant 50 kilogrammes à $\frac{1}{2}$ milligramme près.

Pour les balances d'essai destinées à des poids beaucoup moindres, on a atteint la précision de $\frac{1}{10}$ de milligramme.

Quant aux balances de commerce, on se contente naturellement d'une moins grande exactitude, et les balances de 50 kilogrammes bien faites, par exemple, accusent une différence de poids de 10 milligrammes seulement.

Les conditions générales de stabilité de l'équilibre montrent d'ailleurs que si le centre de gravité était au-dessus de l'arête de contact des couteaux de l'axe, l'équilibre ne pourrait jamais subsister, et la balance serait alors *folle*, selon l'expression d'usage.

L'excessive sensibilité des balances, due aux conditions que nous venons d'indiquer, ainsi qu'au fini de l'exécution, au poli des surfaces, présente l'inconvénient que les oscillations y sont lentes, et qu'elles n'arrivent à la position d'équilibre qu'après un temps assez long. On remédie à ce défaut par divers dispositifs qu'il n'y a pas lieu d'indiquer ici, mais qui ont pour objet d'arrêter les plateaux avant de laisser agir les poids, de les laisser doucement poser sur leurs couteaux, de les arrêter de nouveau à volonté dans leurs oscillations, afin d'en limiter l'amplitude et la durée.

Il n'est pas inutile d'ajouter que, pour que la forme des couteaux et de leurs coussinets ne s'altère pas, l'on a soin de munir les bonnes balances de dispositifs qui permettent de soulever le fléau et les plateaux soit quand on charge la balance, soit quand on cesse de s'en servir.

136. *Vérification des balances.* — Après s'être assuré que

les couteaux sont bien exécutés, qu'ils sont tous contenus dans le même plan, que leurs coussinets sont bien plans et polis, on met le fléau en place, et l'on vérifie s'il est en équilibre quand l'aiguille est au zéro de son limbe ou verticale. On retourne le fléau pour voir s'il en est de même dans l'autre sens. On doit s'assurer de l'égalité des bras du fléau; à cet effet on suspend les plateaux au fléau et l'on s'assure que celui-ci reste dans sa position d'équilibre quand on les change de côté. On charge les plateaux de poids gradués, depuis le plus petit jusqu'au plus grand que la balance doive peser, et l'on s'assure si la sensibilité reste la même dans toute cette étendue. Après une pesée, on change les poids de plateau et l'on reconnait si les résultats sont les mêmes.

La sensibilité des balances du commerce est fixée par les règlements à $\frac{1}{2000}$ du poids à peser, depuis le plus petit jusqu'au plus fort. Quand l'addition de cette fraction du poids ne fait pas incliner le fléau du côté où elle est placée, on dit que la balance est sourde.

137. *Méthode des doubles pesées.* — Malgré tous les soins apportés dans la construction, lorsque l'on veut opérer très-exactement, on emploie, pour se mettre à l'abri des erreurs, une méthode fort simple dite des *doubles pesées*, due à l'illustre Borda.

Après avoir placé le corps à peser dans l'un des plateaux, on met la balance en équilibre en chargeant l'autre plateau d'une manière quelconque, soit avec des poids, soit avec de la grenaille de plomb, de fer, etc. Lorsque cet équilibre est bien établi, on enlève le corps à peser et on le remplace par le nombre d'unités de poids nécessaire pour rétablir cet équilibre; on obtient ainsi exactement le poids cherché du corps, abstraction faite de toute inexactitude de la balance, pourvu qu'elle soit assez sensible.

138. *Balance romaine.* — Dans ce système de balances, connu de toute antiquité, et dont plusieurs modèles chinois

fort légers et fort simples se trouvent au Conservatoire, les bras de levier de la charge P et du poids Q sont inégaux, celui p de la charge reste constant, tandis que celui q du poids Q varie; mais le contre-poids est toujours le même. La condition d'équilibre

$$Pp = Qq$$

est alors satisfaite en faisant varier le bras de levier q du poids constant Q, de façon que l'on ait toujours

$$q = \frac{p}{Q}P.$$

Le rapport $\frac{p}{Q}$ étant constant, l'on voit que dans cette balance le bras de levier du poids constant doit varier propor-

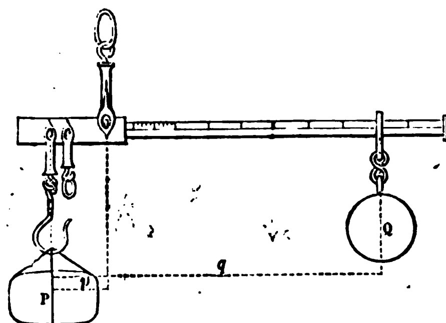


Fig. 45.

tionnellement au poids du corps à peser. Mais dans la graduation du grand bras de levier, il faut tenir compte du poids propre du levier et du plateau; c'est ce que l'on fait en déterminant d'abord la position du poids curseur Q, pour laquelle le fléau est horizontal ou en équilibre sous son propre poids et celui de ses crochets ou de ses plateaux. Soit q' la distance de ce poids à l'axe; le moment Qq' sera égal à l'excès de celui du plateau vide et de son bras de levier sur celui de l'autre bras de levier.

Si, pour faire équilibre au poids P mis dans le plateau et

$$Pp = Qq - Qq'$$

dont le moment est Pp, il faut éloigner le poids curseur Q à une distance q, on aura pour l'équilibre la relation :

$$Pp + Qq' = Qq, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q(q-q')}{p},$$

ou

$$q - q' = \frac{Pp}{Q}.$$

Ainsi, en tenant compte du poids de l'appareil, l'on voit que ce sont les distances du poids curseur au zéro qui doivent croître proportionnellement aux poids à peser.

Les longueurs p et q', ainsi que le poids curseur Q, étant connues quand la balance est faite, l'on voit que l'on pourra calculer la valeur de la distance q, qui correspond au plus grand poids à peser par la formule

$$q = q' + \frac{Pp}{Q};$$

mais il vaudra mieux, après l'avoir ainsi calculée pour le poids maximum Q', la déterminer exactement par expérience. Cela fait, on partagera l'intervalle $q - q'$ en autant de parties égales que l'on voudra avoir de subdivisions du poids Q'.

Les romaines pour peser 20 à 25 kilogrammes portent ordinairement des divisions correspondantes à 1 kilogramme, et l'on exprime les fractions à vue, d'après la position du curseur.

Il est d'ailleurs évident que dans cette balance, comme dans la précédente, les couteaux de l'axe de suspension, ceux du crochet qui porte le poids, et ceux du poids curseur, ainsi que les encoches dans lesquelles on l'arrête quelquefois, doivent encore être dans un même plan pour que les rapports des leviers soient indépendants de l'inclinaison du fléau; le centre de gravité de celui-ci doit de même être au-dessous et très-près de l'axe de suspension. Dans ces conditions la balance oscille librement.

L'usage des romaines *folles* ou non oscillantes est défendu. Le degré d'exactitude des romaines est fixé par les règlements à $\frac{1}{500}$ du poids à peser depuis le plus petit jusqu'au plus grand.

139. *Peson.* — On se sert quelquefois pour les petites pesées du commerce d'une balance qui n'a qu'un seul plateau d'un poids fixe, disposée ainsi qu'il suit : un fléau à deux bras inégaux, reposant sur un axe cylindrique en acier, reçoit à son bras le plus long le plateau de balance; le bras le plus court est terminé par un poids fixe de forme ordinairement lenticulaire ou aplatie. Une aiguille OG, fixée perpendiculairement à la longueur du levier, passe par l'axe de rotation et porte à son extrémité un poids q. Les différents poids, le levier, le plateau et l'aiguille sont tellement proportionnés que quand le plateau est vide, et le fléau horizontal, le centre de gravité de l'appareil composé du fléau, du contre-poids et du plateau se trouve en un point G de l'aiguille, sur la verticale qui passe par l'axe. Dans cette position la pointe de l'aiguille correspond au zéro d'un limbe gradué que porte l'instrument.

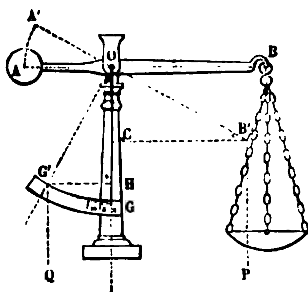


Fig. 46.

Cela posé concevons qu'un poids P étant mis dans le plateau, le levier s'incline, et cherchons la position que prendra l'extrémité de l'aiguille sur le limbe. Nommons :

Q le poids total du levier, du contre-poids, du plateau, etc., et considérons-le comme agissant au centre de gravité G du système (voir au n° 138), lequel aura pris alors la position G'.

La condition d'équilibre de l'aiguille nous donnera

$$P.B'C = Q.G'H \quad \text{d'où} \quad P = Q.\frac{G'H}{B'C}$$

Or les triangles OB'C et OG'H sont semblables, et l'on a

$$OB' \text{ ou } OB : B'C :: OG' \text{ ou } OG : OH \quad \text{d'où} \quad B'C = \frac{OH \times OB}{OG}$$

et par suite

$$P = Q.\frac{OG}{OB}.\frac{G'H}{OH} = Q.\frac{OG}{OB}.\text{tang } GOG'$$

Le poids Q du fléau et des pièces qui en dépendent est connu et constant, la distance invariable OG du centre de gravité à l'axe peut être déterminée par expérience, la longueur OB du grand bras de levier est connue et invariable; le facteur constant $Q.\frac{OG}{OB}$ est donc déterminé et l'on voit que les poids à peser P sont proportionnels aux tangentes des inclinaisons du levier ou des arcs parcourus sur le limbe par l'extrémité de l'aiguille.

La division de ce limbe est donc facile puisque l'on aura

$$\text{tang } GOG' = \frac{OB}{OG}.\frac{P}{Q}$$

et qu'en faisant successivement $P = 1^{kil},00$, $1^{kil},500$, $2^{kil},00$ etc., on calculera facilement les valeurs des tangentes des angles GOG' correspondant aux positions d'équilibre et par suite les angles parcourus par l'aiguille.

Dans la pratique on détermine ces angles par l'expérience, l'on voit du reste que ce genre de balance n'est pas susceptible de la même précision que la balance ordinaire, mais il est assez commode pour quelques usages.

140. *Balance-bascule de Quintenz.* — Cet appareil qui porte le nom de son inventeur et que l'on appelle aussi *balance-bascule*, sert, selon les proportions qu'on lui donne, à peser les ballots ordinaires et les plus lourds fardeaux. Sa forme varie selon sa destination, mais sa disposition générale est toujours à peu près la même.

Il se compose d'un tablier AB horizontal, qui repose vers l'une de ses extrémités, en C, sur un couteau triangulaire

porté par un levier DI, qui s'appuie en D sur un point fixe et est soutenu en I par une tige ou bielle verticale HL. L'autre extrémité du tablier AB est soutenue en F par une bielle FG au moyen d'un arc-boutant EF. Les deux bielles

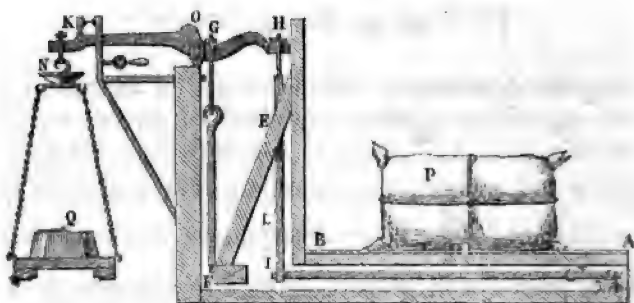
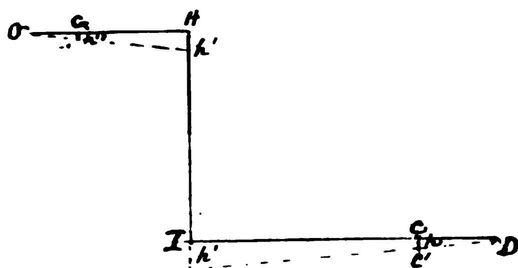


Fig. 47.

HL et FG sont soutenues par des couteaux qui font partie d'un levier HOK, soutenu en O sur le pied de la balance et qui porte en K le plateau dans lequel on met les poids.

Tout cet appareil est porté par un cadre ou châssis, mobile dans les cas ordinaires, mais qui est rendu fixe et solidement établi sur une maçonnerie quand il s'agit des ponts à bascules destinés à peser les plus grosses voitures. Dans tous les cas il faut que ce bâtis et le tablier soient disposés bien horizontalement en tous sens.

La première condition que l'appareil doit remplir consiste en ce que cette horizontalité subsiste quand le tablier est chargé. Il est facile d'y satisfaire par les proportions données aux divers bras de levier. En effet, si le point C du tablier ou le couteau qui le soutient s'abaisse d'une hauteur h, le point I, extrémité du levier AI et par conséquent le point H, extrémité supérieure de la bielle HI, descendra de la hauteur $h \times \frac{DI}{DC'}$; mais en même temps le point G du levier OH et par suite l'extrémité F de la bielle GF qui soutient l'autre extrémité du tablier s'abaissera de la hauteur $h \times \frac{DI}{DC'} \times \frac{OG}{OH}$.



by similar triangles

$$h' : h :: DI : DC$$

Therefore $$h' = h \times \frac{DI}{DC}$$

but $$DC = DC'$$

Therefore $$h' = h \frac{DI}{DC}.$$

$$h'' : h' :: OG : OH$$

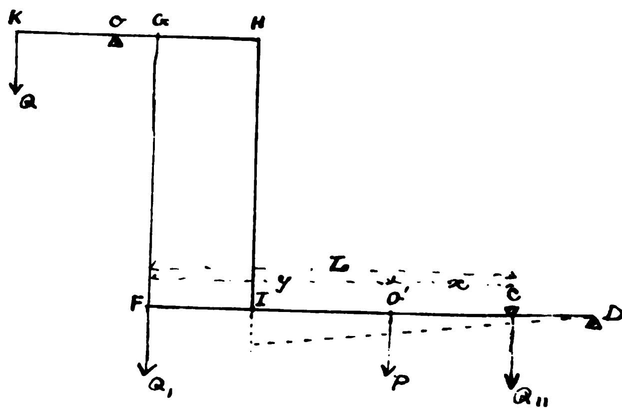
Therefore $$h'' = h' \frac{OG}{OH}$$

but $$h' = h \frac{DI}{DC}$$

Therefore $$h'' = h \times \frac{DI}{DC} \times \frac{OG}{OH}$$

If $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$

Then $\frac{c}{d} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$



Pour que les deux appuis C et F du tablier descendent de la même quantité il faut donc et il suffit que le facteur $\frac{DI}{DC'} \times \frac{OG}{OH}$ soit égal à l'unité, ce qui conduit à la condition que les rapports $\frac{DC'}{DI}$ et $\frac{OG}{OH}$ soient égaux.

Cette condition étant satisfaite, il est facile de voir qu'en quelque point du tablier que repose la charge P à peser, son action sur le levier OH sera la même que si elle était suspendue à la tige GF, sur le couteau G. Supposons, en effet, que le centre de gravité de la charge P repose en O′, si nous la décomposons en deux, agissant, l'une en C, et l'autre en F, appelons L la distance verticale entre C et F.

La composante de P en F sera $\frac{P.x}{L}$, et elle agira directement en G.

La composante de P en C sera $\frac{Py}{L}$, et celle-ci donnera lieu en I, et par suite en H, à un effort

$$\frac{Py}{L} \times \frac{DC'}{DI},$$

lequel revient évidemment à un effort exercé en G, et égal à $\frac{Py}{L} . \frac{DC'}{DI} \times \frac{HO}{OG}$; or $\frac{DC'}{DI} \times \frac{HO}{OG} = 1$ d'après ce qui précède. Donc les deux composantes de la charge P donnent lieu en G à l'effort

$$\frac{Px}{L} + \frac{Py}{L} = P . \frac{x+y}{L} = P,$$

puisque $x + y = L$, d'après la figure.

Ainsi, en quelque endroit du plateau que l'on place la charge, elle se trouve, par l'effet des articulations du système, reportée au point G avec sa valeur intégrale, et l'on a pour l'équilibre entre cette charge P et le poids Q la relation

$$P . OG = Q . OK.$$

Le rapport $\frac{OG}{OK}$ est ordinairement égal à $\frac{1}{10}$ pour les ba-

lances portatives ordinaires du commerce, et à $\frac{1}{100}$ pour les balances destinées au pesage des gros fardeaux, les ponts à bascule, etc.

Tous les points d'appui et les articulations du système sont formés par des couteaux en acier reposant sur des siéges du même métal bien dressés. Ceux de ces couteaux qui correspondent aux parties les plus larges du tablier sont doubles et exactement parallèles les uns aux autres. Au-dessus du plateau à poids, se trouve une petite cuvette N dans laquelle on place des poids ou des grenailles pour rétablir l'équilibre du plateau non chargé et des leviers de l'appareil lui-même, quand par l'usé ou par des causes accidentelles les conditions primitives se trouvent changées.

Pour éviter les calculs, les poids dont on se sert portent habituellement l'indication en chiffres d'un poids décuple ou centuple de leur poids réel, selon la proportion de la balance.

Un levier d'arrêt à poignée sert à soulever le levier HOK pour soulager les couteaux quand la balance n'est pas en charge, et pour éviter les chocs sur leurs arêtes au moment du chargement.

Ce système de balance a été modifié dans ses formes, mais non dans son principe; il a été ingénieusement mis à profit pour des grues qui pèsent les fardeaux en même temps qu'on les élève pour les charger. On lui a appliqué divers dispositifs qui permettent d'améliorer et même d'enregistrer les pesées, mais nous ne pouvons ici nous occuper de ces détails.

141. *Théorie du levier.* — Il résulte de ce qui précède que, dans le cas de la rotation autour d'un point ou d'un axe fixe sollicité par des forces concourantes ou parallèles, le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes, si les forces agissent pour produire la rotation dans le même sens, ou à leur différence si elles agissent en sens contraires. Les perpendiculaires r, p, q,

abaissées du centre de rotation sur les directions des forces, se nomment les bras de levier des forces, et l'on a la relation

$$Rr = Pp \pm Qq.$$

Dans le cas de l'équilibre, on a $Rr = o$ et par suite $Pp = Qq$, si l'une des forces, P, est la puissance, et l'autre, Q, une résistance à vaincre; on voit donc que pour l'équilibre le moment de la puissance doit être égal à celui de la résistance.

Si la résistance et son moment sont donnés, l'effort à développer par la puissance qui est donné par la formule

$$P = \frac{Qq}{p}$$

sera d'autant plus petit que son bras de levier p sera plus grand. Cette relation contient la théorie de l'appareil simple appelé *levier*, et qui est employé au mouvement ou au déplacement des fardeaux par la force musculaire des hommes. On distingue trois genres de leviers : celui du premier genre (fig. 48), où la puissance et la résistance agissent respectivement de part et d'autre du centre de rotation; dans le levier du deuxième genre la puissance agit à l'extrémité du levier, et la résistance entre celle-ci (fig. 49) et le point d'appui; dans celui du troisième genre (fig. 50), la puissance agit entre le point

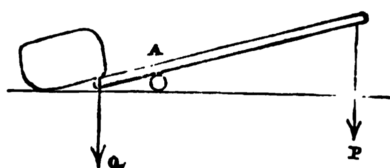


Fig. 48.

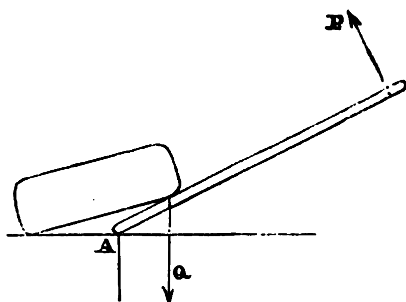


Fig. 49.

d'appui et la résistance. Ces distinctions n'ont d'ailleurs aucune importance quant au principe qui vient d'être énoncé.

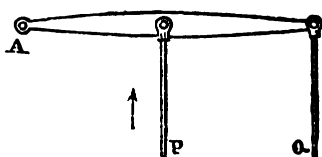


Fig. 50.

L'avantage de l'emploi du levier consiste seulement en ce qu'avec un effort donné et limité P on peut, par une proportion convenable, établie entre les bras de levier p et q de la puissance et de la résistance, surmonter un effort très-considérable. Mais il ne faut pas perdre de vue que, les arcs décrits ou les chemins parcourus par les points d'application des forces étant proportionnels aux angles décrits et aux rayons ou bras de levier, la relation des moments $P.p=Q.q$ multipliée par l'arc décrit a_1 à l'unité de distance donne $P.pa_1=Q.qa_1$; ce qui exprime, comme on l'a déjà vu, que le travail de la puissance est égal à celui de la résistance; de sorte que, sous le rapport du travail développé, on ne gagne rien à l'emploi du levier. Il est toujours, sauf ce qui est consommé par les résistances passives, égal à celui que développe la résistance.

C'est donc une erreur très-grave de croire que l'effet des machines, en ce qui concerne le travail, puisse être augmenté par des combinaisons de leviers. Il ne faut pas oublier que, si les efforts à exercer diminuent à mesure que leurs bras de levier augmentent, les chemins qu'il faut faire parcourir à leurs points d'application croissent précisément dans le rapport inverse.

DU CENTRE DE GRAVITÉ

ET DE L'ÉQUILIBRE DES TENSIONS DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS.

142. *Application des théorèmes précédents à la pesanteur.* — La pesanteur agit sur toutes les particules des corps, et les directions de tous ses efforts sont parallèles ou verticales. Leur résultante, égale à leur somme, est ce qu'on nomme le poids du corps. Le *centre des forces parallèles* ou le point par lequel passe constamment la résultante s'appelle alors le *centre de gravité*.

Toutes les fois que ce point sera arrêté en une position invariable, sa résistance détruisant l'action de la gravité, le corps sera en équilibre quant à la pesanteur.

143. *Détermination du centre de gravité.* — Il est souvent très-nécessaire dans les arts mécaniques de connaître la position du centre de gravité. Sa détermination peut se faire par l'expérience ou par la géométrie et le calcul.

Pour déterminer le centre de gravité d'un corps par l'expérience, on le pose sur une arête tranchante, et on détermine par tâtonnements la position nécessaire pour que le corps y soit en équilibre. On marque alors sur les faces du corps les traces du plan vertical qui passe par cette arête et qui contient le centre de gravité. On répète, s'il le faut, l'opération sur plusieurs faces, et le centre de gravité se trouve à l'intersection commune des plans ainsi déterminés. La symétrie des corps dans certains cas dispense de la détermination de quelques-uns des plans.

Quelquefois on suspend le corps, et à l'aide du fil à plomb on détermine les traces d'un ou de plusieurs plans verticaux passant par le centre de gravité.

L'application de cette méthode présente quelques difficultés; mais elle peut néanmoins être employée quelquefois, même pour des corps très-lourds, tels que des ponts-levis, des bouches à feu, des pièces de machines, etc., dont les formes compliquées ne se prêtent pas facilement à l'application des méthodes géométriques.

144. *Méthode géométrique.* — Lorsque les corps ont des formes régulières et géométriques et qu'ils sont composés de matières homogènes, on peut, à l'aide de la géométrie, déterminer la position du centre de gravité.

Pour tous les corps de forme symétrique il est d'abord évident que le centre de gravité est au centre de figure : ainsi le centre de gravité d'une feuille plane, d'une barre cylindrique ou prismatique, d'une sphère, d'un ellipsoïde, d'un parallélipipède, est contenu dans les plans ou lignes de symétrie.

145. *Triangle.* — Si l'on suppose que l'on partage un triangle en bandes ou tranches infiniment minces parallèles à sa base BC, il est évident que, le centre de gravité de chacune de ces tranches se trouvant au milieu de sa longueur, le centre de gravité du triangle se trouvera sur la droite AD, qui va du sommet A au milieu D de BC, puisqu'elle contiendra les centres de gravité de toutes les tranches. Par la même raison, le centre cherché se trouvera sur les lignes BE et CF, qui joignent respectivement les sommets B et C avec les milieux E et F des côtés opposés. Il en serait de même du centre de gravité de trois boules égales qui seraient respectivement placées à chacun des sommets du triangle. Or il est d'abord évident que, le centre de gravité des boules B et C étant en D, et ces boules pouvant être remplacées en ce point par une seule égale en poids à leur

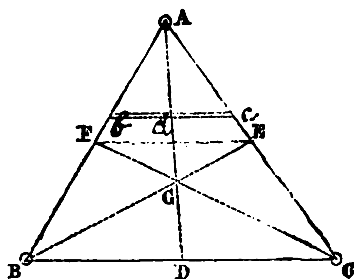


Fig. 48.

By similar triangles

$Ad : db :: AD : DB$

$:: AD : DC$

$:: Ad : dc$

therefore

$bd = dc$

Therefore the line AD bisects every line drawn parallel to the base BC and terminated by the sides AB and A-

parties réciproquement proportionnelles aux nombres 1 et 3.

Donc *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire se trouve sur la ligne qui joint le centre de gravité de sa base au sommet opposé et au quart de la longueur de cette droite à partir de ce centre.*

La même règle s'applique à une pyramide à base quelconque.

149. *Centre de gravité d'un corps terminé par des formes quelconques.* — On a souvent besoin de déterminer le centre de gravité d'un corps ou d'un volume terminé par des contours plus ou moins réguliers, mais qui ne sont soumis à aucune loi connue. Tel est le cas des bâtiments de navigation, pour lesquels il importe à la fois de déterminer le déplacement, et le centre de gravité de ce déplacement. Si l'on suppose le corps partagé en tranches parallèles, le moment de chaque tranche par rapport au plan de la première sera donné par le produit de son poids ou de son volume, et de sa distance à ce plan, et la somme de tous les moments semblables sera égale au produit du poids ou du volume total par la distance du centre de gravité au même plan. Pour avoir cette somme de moments, on partagera la longueur totale L du corps dans le sens perpendiculaire au plan en un nombre pair de parties égales, on déterminera l'aire S de chacune des tranches correspondantes aux diverses parties du profil et la distance X des centres de gravité de chacune d'elles au plan, ce qui donnera les produits

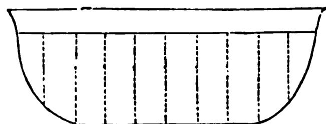


Fig. 50.

$$S_1X_1, \quad S_2X_2, \quad S_3X_3, \quad \text{etc.},$$

représentant respectivement le produit de l'aire de chacune des tranches par sa distance au plan de la première, on aura

$X_1 = o$; puis, appliquant le théorème de Simpson, on aura pour la somme des moments cherchés

$$\frac{1}{3}\frac{L}{2n}\Big[S_1X_1 + (SX)_{2n+1} + 4\,[(SX)_2 + (SX)_4 + \dots + (SX)_{2n}]$$
$$+ 2\,[(SX)_3 + (SX)_5 + \dots (SX)_{2n-1}]\Big].$$

Cette somme doit être égale au produit VX, du volume V du corps par la distance cherchée X de son centre de gravité au plan de la première tranche.

Pour les bâtiments dont les formes sont symétriques par rapport au plan vertical passant par la carène, il suffira de déterminer ainsi les distances du centre de gravité par rapport à deux plans, dont l'un contiendra l'étambot, et l'autre sera le plan de flottaison, ou le plan inférieur de la carène.

150. *De la stabilité de l'équilibre.* — L'on vient de voir que quand un corps est sollicité par des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraires, il faut pour l'équilibre que la résultante de ces forces passe par l'axe ou le centre de rotation. Mais dans certains cas cette condition, d'abord satisfaite, peut ne plus l'être au moindre déplacement, et l'équilibre cessant alors, il convient d'examiner dans quelles circonstances cet équilibre tend à se rétablir de lui-même ou se trouve complétement rompu.

Pour expliquer plus facilement ce point de vue de l'équilibre considérons un corps ovoïde, par exemple, reposant par l'une de ses extrémités sur un plan. Toutes les fois que la verticale OP, qui passe par le centre de gravité O du corps, passe par le point de contact *a* du corps avec le plan, point autour duquel la rotation tend à se faire, le corps est en équilibre.

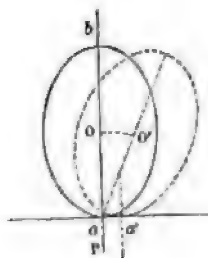


Fig. 51.

Mais dans le cas de la figure (51) qui montre le grand axe *ab* du corps dans la position verticale pour laquelle le centre de gravité du

corps est le plus haut possible, l'on voit que par l'effet du plus petit déplacement du corps il reposera sur un autre point *a'* de sa surface plus rapproché de son centre de gravité O et que son centre de gravité ayant décrit un assez grand arc de cercle se sera abaissé et se sera en outre déplacé de façon que la verticale menée par ce centre ne passera plus par le point de contact. Il en résulte que la pesanteur tend à faire tourner le corps de plus en plus et à l'écarter de sa position primitive d'équilibre. On dit dans ce cas que l'équilibre est instable parce que dès qu'il est rompu par une cause quelconque le corps tend de plus en plus à tomber. Si au contraire le corps que nous considérons, repose sur le plan par le point de sa surface le plus rapproché de son centre de gravité, de manière que son petit axe soit vertical, lorsqu'on l'écartera un peu de cette position, son centre de gravité s'élèvera et la pesanteur agissant pour le faire redescendre le corps tendra à revenir à sa position primitive d'équilibre. On dit dans ce cas que l'équilibre est stable.

En résumé, un corps est en position d'équilibre stable quand après avoir été un peu écarté de cette position il tend de lui-même à y revenir, et il est dans une position d'équilibre instable quand au contraire après en avoir été un peu éloigné il tend à s'en écarter de plus en plus.

L'équilibre stable correspond en général aux cas où le centre de gravité est le plus bas possible par rapport à la forme et à la disposition du corps. L'équilibre est instable au contraire, quand le centre de gravité peut occuper une position plus basse.

151. *Application des considérations générales sur la composition et la décomposition des forces.* — Les notions que nous venons d'exposer s'appliquent particulièrement dans les constructions, lorsque l'on a besoin de connaître les efforts, les pressions, les tensions, les poussées que certaines parties des systèmes ou appareils que l'on considère

exercent les unes sur les autres, soit pour calculer les effets mécaniques de ces appareils, soit pour en déterminer les dimensions, de façon qu'ils soient en état d'y résister et que la stabilité du système ou de la construction soit assurée. Nous allons indiquer quelques exemples choisis dans les applications les plus simples.

152. *De l'équilibre des cordes.* — Lorsqu'une corde ou une tige AB est sollicitée à ses deux extrémités A et B par des forces P, Q... et P', Q'..., pour qu'elle soit en équilibre sous l'action de ces forces extérieures, il faut évidemment que les composantes de ces forces perpendiculaires à la direction AB aient une résultante nulle ou se fassent équilibre. Quant aux composantes dirigées dans le sens de la corde il faudra aussi que la somme de celles qui agissent dans un sens, de A vers B par exemple, soit égale à la somme de celles qui agissent en sens contraire.

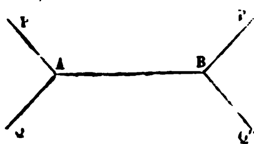


Fig. 52.

Ainsi la condition générale de l'équilibre d'une corde ou d'une tige sollicitée par des forces quelconques, c'est que toutes ces forces se réduisent à deux forces égales et contraires agissant dans sa direction propre. Dans le cas d'une corde qui n'offre pas de rigidité, de résistance à la compression, il faut de plus que ces deux forces agissent pour l'étendre, pour l'allonger et soient des forces de tension. Dans celui où il s'agit d'une tige ou d'une barre solide, cette dernière condition n'est pas nécessaire et les efforts peuvent produire l'extension ou la compression, mais sous cette réserve cependant que les réactions moléculaires soient dans ce dernier cas assez énergiques pour que le corps ne se déforme pas par refoulement ou par flexion.

Dans tous les cas les deux forces égales et opposées qui sollicitent la tige donnent la mesure de la *tension* qu'elle éprouve ou de l'effort de *compression* auquel elle doit résister. Les règles déduites de l'expérience et de la théorie de la ré-

sistance des matériaux montrent quelles proportions il convient de donner à ces cordes ou tiges pour qu'elles résistent convenablement à ces efforts.

153. *Équilibre entre les efforts transmis par des cordes ou des tiges qui concourent en un même point.* — Il est évident que dans ce cas il faut et il suffit pour l'équilibre que l'un quelconque des efforts développés soit égal et directement opposé à la résultante de tous les autres. Dans le cas où il y a un support il faut que la résultante de toutes les forces soit égale et contraire à la résistance que ce support oppose.

154. *Poulie mobile.* — Ainsi quand un réverbère est suspendu par une chape C à poulie mobile à une corde attachée en deux points fixes A et B, il arrive à une position d'équilibre et les relations entre le poids P du réverbère, et les tensions T et T' et les angles qu'elles forment avec la verticale sont déterminées par les conditions précédentes.

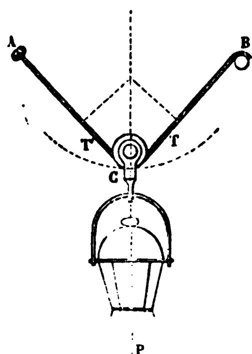


Fig. 53.

Il est clair d'abord que si l'on décompose chacune de deux tensions T et T' en deux composantes, l'une verticale et l'autre horizontale, la somme des composantes verticales devra être égale au poids P et les composantes horizontales seront égales et de sens opposés.

De plus l'équilibre ayant lieu, abstraction faite du frottement, il faut que les tensions T et T' soient égales. Ce qui montre aussi que leurs directions font des angles égaux de part et d'autre de la verticale.

155. *Cas d'un pilier.* — Si les tensions T et T' sont celles d'une chaîne de pont suspendu, qui appuient un rouleau C sur lequel elles agissent sur un support AB, il faut que leur résultante P agisse dans la direction de ce support et le

presse sur sa base; car si elle passait au dehors, selon une ligne CD' par exemple, elle tendrait à le faire tourner autour de son arête inférieure B et à le renverser. Quoique d'une autre part le poids propre Q du pilier s'oppose à cette rotation, il n'en est pas moins prudent et même nécessaire de satisfaire, soit par la direction des tensions, soit par la construction du support, à la condition que la résultante de ces tensions passe dans l'intérieur de la base BB' du pilier et aussi près que possible de la verticale de son centre de gravité.

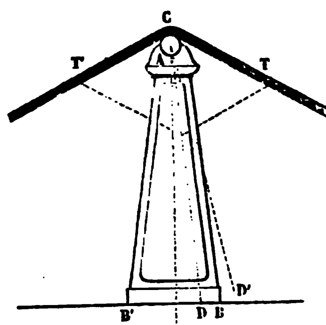


Fig. 54.

186. *Du polygone funiculaire.* — On nomme ainsi un polygone formé par des cordes, des chaînes ou des tiges dont les sommets sont sollicités par des forces quelconques. L'équilibre d'un pareil système est soumis à des règles faciles à démontrer.

Supposons d'abord que le polygone n'ait pas tous ses côtés dans un même plan et soit représenté par le contour

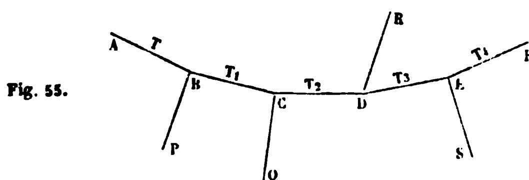


Fig. 55.

ABCDEF. Soient P, Q, R, S, T.... les forces qui sollicitent chacun des sommets A, B, C, D, E;

T, T_1, T_2, T_3, T_4.... les tensions respectivement éprouvées par les côtés AB, BC, CD, DE, EF.

Il est évident que si le polygone entier est en équilibre, il devra en être de même de tous ses sommets séparément,

et dès lors en appliquant le raisonnement du n° (155) précédent, nous voyons 1° que deux côtés quelconques qui se réunissent à un même sommet et la direction de la force qui sollicite ce sommet doivent être dans un même plan ; 2° que la tension T_1 doit être égale et contraire à la résultante de la force P et de la tension T ; que de même cette tension T_1 doit être égale et contraire à la résultante de la force Q et de la tension T_2, et par conséquent qu'en remplaçant au sommet C la tension T_1 par ses deux composantes P et T, les forces P et Q et les tensions T et T_2, supposées transportées au point C parallèlement à elles-mêmes, devront s'y faire équilibre. On verrait de même que les forces P, Q, R et les tensions T et T_3, supposées transportées parallèlement au sommet D, devraient s'y faire équilibre.

En continuant ainsi, l'on arrivera à reconnaître que, pour l'équilibre du polygone funiculaire, il faut et il suffit que toutes les forces extérieures et les tensions des deux côtés extrêmes étant supposées transportées parallèlement à elles-mêmes en un sommet quelconque, elles s'y fassent équilibre.

Ce qui précède est indépendant de la direction des forces et de la nature des côtés et s'applique au cas où ces côtés sont soumis à des efforts de compression au lieu de l'être à des tensions, sous la seule réserve que ces côtés devront être assez rigides pour résister à ces compressions, sans se déformer.

157. *Cas où les forces qui sollicitent le polygone funiculaire sont des poids.* — Dans ce cas les forces P, Q, R, S .... sont toutes verticales et parallèles, et il est d'abord facile de voir que le polygone est nécessairement plan. Car la direction de chaque force et celles des deux côtés qui se réunissent au sommet qu'elle sollicite sont dans un même plan, qui est vertical ; et comme par un même côté l'on ne peut mener qu'un plan vertical, il s'ensuit que les deux plans verticaux

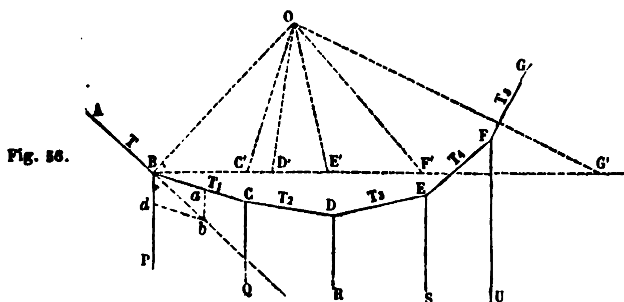
qui contiennent un même côté du polygone se confondent, et ainsi des autres.

De plus, toutes les forces extérieures P, Q, R, S.... et les tensions T et T_n des deux côtés extérieurs devant se faire équilibre, il faut que ces tensions fassent équilibre à la résultante des forces parallèles.

Si le polygone n'est sollicité que par son propre poids, comme dans le cas d'une chaine articulée, la résultante de toutes les forces extérieures est le poids du polygone et passe par son centre de gravité, et les directions des deux tensions T et T_n doivent, pour l'équilibre, se couper en un même point de cette résultante ou de la verticale du centre de gravité.

158. *Détermination des tensions par construction graphique.* — D'après ce que l'on a vu, si, par le côté AB prolongé, l'on porte à une certaine échelle une longueur égale à la tension T, et qu'on construise le parallélogramme B*abd*, le côté B*a* représentera, à la même échelle, la tension T_1 du côté BC, et le côté B*d* la force extérieure P. De plus, si l'on mène par le point B, par exemple, une horizontale indéfinie sur laquelle on porte les longueurs BC′, C′D′, D′E′, E′F′, F′G′ proportionnelles aux forces P, Q, R, S, U, et qu'au même point on élève BO perpendiculaire à AB et de longueur pro-

Fig. 58.



portionnelle à la tension T ou à B*b*, il est clair que le triangle BOC′, ayant deux côtés BO et BC′ respectivement perpendiculaires aux côtés B*b* et B*d* du triangle B*bd* et deux

côtés BO et BC' proportionnels à ces mêmes côtés B*b* et B*d*, sera semblable au triangle B*bd*. Donc le troisième côté OC' du premier sera proportionnel au troisième côté *bd* ou B*a* ou à la tension T_1, et comme il sera en outre perpendiculaire au côté BC du polygone, le triangle suivant OC'D' sera dans les mêmes conditions, par rapport au côté CD, à la force Q et à la tension T_2, qui sera proportionnelle au côté OD', et ainsi de suite.

Donc si les poids qui sollicitent les différents sommets d'un polygone funiculaire se font équilibre et si l'on porte sur une ligne droite horizontale des longueurs respectivement proportionnelles à ces poids, puis que des points de cette ligne correspondant à chaque sommet on mène des droites perpendiculaires aux directions des côtés du polygone, toutes ces droites se couperont en un même point et leurs longueurs seront proportionnelles aux tensions des côtés du polygone qui seront ainsi déterminées.

159. *Des ponts suspendus.* — Les ponts suspendus nous offrent un exemple de l'application des notions précédentes à un polygone aux sommets duquel sont fixées des tiges nommées *suspensoires*, qui soutiennent le tablier du pont sur lequel on suppose uniformément répartie une charge d'épreuve qui est fixée par les règlements d'administration à 200 kilogrammes par mètre carré.

Le polygone est formé par des chaînes en fer à longs maillons articulés, faits en fer rond ou mieux en fer méplat laminé, ou par des faisceaux de fils de fer étendus aussi parallèlement que possible et reliés avec des fils de fer réunis. Des menottes reçoivent les tiges de suspension, qui sont elles-mêmes faites avec des barres de fer ou des faisceaux de fils de fer.

Il importe de déterminer la forme du polygone ou la position de chacun de ses sommets et la tension de chacun de ses côtés. Supposons d'abord qu'il s'agisse du cas le plus ordinaire, celui où les deux piliers qui supportent la chaîne

ont la même hauteur et où l'intervalle qui les sépare est partagé en un nombre impair de parties égales. Il en résultera que le côté inférieur du polygone sera horizontal. Si l'on admet qu'il n'y ait qu'une chaîne de chaque côté, le poids supporté par chaque paire de suspensoires est égal à celui d'une travée, de sorte que si l'on nomme 2P le poids d'une travée ou de la portion du pont comprise entre les plans verticaux qui contiennent les deux paires de suspensoires consécutives, P sera la charge de chaque suspensoire.

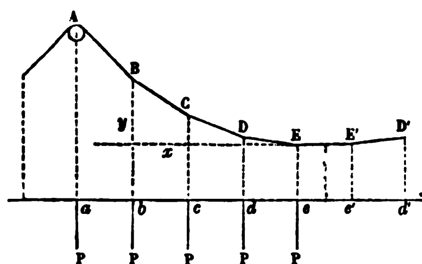


Fig. 57.

En nommant T_0 la tension du côté horizontal, cette tension devra, pour chaque articulation, faire équilibre aux forces verticales qui tendent à faire tourner les côtés qui s'y assemblent. Cette considération nous permet de déterminer la relation entre les hauteurs des divers sommets et leurs distances au sommet le plus bas E ou E′ de chaque branche du polygone.

Soit, en effet, y la hauteur d'un sommet quelconque B au-dessus du côté inférieur E E′;

x la distance de la verticale de ce sommet au point E.

On devra avoir, pour l'équilibre autour de l'articulation B, la relation des moments

$$T_0 y = Pl + P \times 2l + P \times 3l + \ldots . + P.nl,$$

en supposant que la suspensoire Bb soit la n^e à partir du côté horizontal.

Cette relation, d'après les propriétés connues des progressions, revient à

$$T_0 y = Pl . \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si on l'applique au pilier, en nommant H sa hauteur au-dessus du côté horizontal, l'on en déduit

$$T_0 = Pl \cdot \frac{n(n+1)}{2 \cdot H},$$

ce qui donne la tension du côté horizontal et fait voir qu'elle est d'autant plus faible que les piliers extrêmes sont plus élevés.

La relation précédente

$$T_0 y = Pl \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{P}{2l}(l^2 n^2 + l^2 n)$$

devient, en remarquant que $x = nl$,

$$T_0 y = \frac{P}{2l}(x^2 + xl) \quad \text{d'où} \quad y = \frac{P}{2T_0 l}(x^2 + xl),$$

ce qui montre que la courbe qui passe par tous les sommets du polygone est une parabole.

Le sommet de cette parabole, qui doit être symétrique à droite et à gauche du côté horizontal E E', a évidemment pour abscisse $x = -\frac{l}{2}$, puisqu'il est à droite du point E et que l'on a compté les abscisses x à gauche de ce point ; on en déduit pour l'ordonnée du sommet de la parabole

$$y = \frac{P}{2T_0 l}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}\right) = -\frac{P}{8T},$$

ce qui donne la position de ce sommet au-dessous du côté horizontal du polygone.

L'emploi de plusieurs chaînes de chaque côté du pont conduit à en disposer une partie de façon que l'un des sommets soit au point le plus bas du polygone. Des considérations analogues aux précédentes permettent d'établir la relation des tensions.

En effet, si l'on appelle T_0 la tension des deux brins qui s'articulent au point le plus bas et qu'on la décompose en deux forces, l'une T'_0 horizontale, l'autre T''_0 verticale,

$$T_0 H = Pl \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Multiplying top and bottom by [illegible]

$$y^2 = 4ax + c$$

$$= -\frac{Pl}{8T_0} \quad ?$$

celle-ci sera pour chaque brin égale à $\frac{P}{2}$ et l'on aura, pour exprimer que l'équilibre a lieu autour d'un sommet quel-

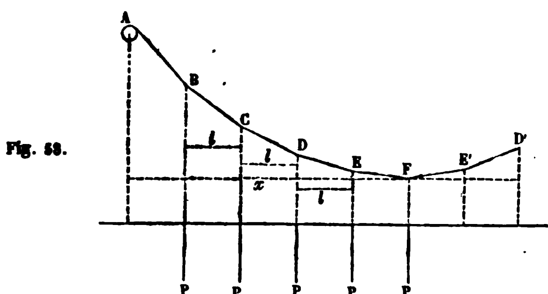


Fig. 58.

conque B entre les efforts verticaux et la tension horizontale T'_0, la relation

$$T'_0 y = Pl + P \times 2l + P \times 3l + \ldots + P(n-1)l + \frac{P}{2} nl,$$

ou, d'après les propriétés connues des progressions,

$$T'_0 y = Pl \frac{n(n-1)}{2} + \frac{P}{2} nl = \frac{Pl}{2} n^2 = \frac{P}{2l} \cdot x^2,$$

attendu que $x^2 = nl$.

Cette relation montre que la courbe qui passe par les sommets du polygone encore est dans ce cas une parabole, et que le sommet de cette courbe est, pour le cas actuel, le point le plus bas du polygone.

H étant la hauteur des piliers, on en déduit

$$T'_0 = \frac{Pl . n^2}{2H},$$

et par suite la tension T_0 des côtés inférieurs, puisque la courbe donne la position de tous les sommets et par suite l'inclinaison des côtés.

Connaissant la tension du côté inférieur horizontal, il est facile d'en déduire celle de tous les autres côtés à l'aide du théorème du n° 158. En effet, si l'on élève sur une droite MN en un point O une perpendiculaire KO représentant, à

une certaine échelle, la tension $T = Pl.\frac{n(n+1)}{2.H}$ du côté horizontal, et que de part et d'autre du pied K de cette perpendiculaire on porte des longueurs K1, K2, K3 .... K1', K2', K3'... égales, à la même échelle, aux charges P, 2P, 3P ...., les lignes O1, O2, O3.... O1', O2', O3'.... seront proportionnelles aux tensions des côtés DE, CD, BC, etc., D'E', C'D', B'C, etc., et les représenteront à l'échelle.

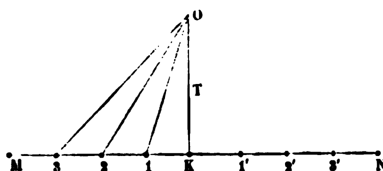


Fig. 59.

Or la figure montre que l'on aura

$$O1 = T_1 = \sqrt{T_0^2 + P^2},\ O2 = T_2 = \sqrt{T_0^2 + (2P)^2},\ O3 = T_3 = \sqrt{T_0^2 + (3P)^2},$$

etc., ce qui donnera directement les tensions des différents côtés du polygone à partir du côté inférieur.

Pour le cas où l'un des sommets est au point le plus bas du polygone, on ferait la même construction et l'on aurait les mêmes formules pour exprimer les tensions T_1, T_2, etc., au moyen de la tension T_0 des deux brins inférieurs.

160. *Application.* — Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un pont de 40 mètres, et ayant 32 suspensoires, écartées les unes des autres de 1^m,20, sauf les extrêmes de chaque côté qui sont à 1^m,40 de la verticale des appuis.

La largeur du tablier est supposée avoir 5 mètres, et le nombre des chaînes est de quatre.

Admettons, ce qui est assez conforme aux constructions ordinaires, que le tablier pèse 1000 kilogr. par mètre courant. La charge d'épreuve étant de 200 kilogr. par mètre carré, cela revient aussi à 1000 kilogr. par mètre courant pour les quatre chaînes, ou en tout par chaîne et par mètre

courant à 500 kilogr. ; et l'écartement des suspensoires étant de $1^m,20$, l'on a ainsi

$$P = 500 \times 1^m,20 = 600 \text{ kilogr.}$$

Si la hauteur H des appuis au-dessus du côté inférieur horizontal est H = 5 mètres, l'on déduit de la formule du n° 159 :

$$T_0 = 600 \times 1,20 \frac{20 \times 21}{2 \times 5} = 30240 \text{ kilogr.}$$

On a ensuite successivement :

$$T_1 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(600)}^2} = 30245^{kil},95$$
$$T_2 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(2 \times 600)}^2} = 30263 \quad 80$$
$$T_3 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(3 \times 600)}^2} = 30293 \quad 52$$
$$T_4 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(4 \times 600)}^2} = 30335 \quad 09$$
$$T_5 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(5 \times 600)}^2} = 30371 \quad 99$$
$$T_6 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(6 \times 600)}^2} = 30453 \quad 37$$
$$T_7 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(7 \times 600)}^2} = 30529 \quad 62$$
$$T_8 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(8 \times 600)}^2} = 30618 \quad 57$$
$$T_9 = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(9 \times 600)}^2} = 30718 \quad 36$$
$$T_{10} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(10 \times 600)}^2} = 30829 \quad 47$$
$$T_{11} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(11 \times 600)}^2} = 30951 \quad 86$$
$$T_{12} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(12 \times 600)}^2} = 31086 \quad 94$$
$$T_{13} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(13 \times 600)}^2} = 31229 \quad 75$$
$$T_{14} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(14 \times 600)}^2} = 31384 \quad 99$$
$$T_{15} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(15 \times 600)}^2} = 31550 \quad 87$$
$$T_{16} = \sqrt{\overline{(30240)}^2 + \overline{(16 \times 600)}^2} = 31727 \quad 24$$

COMPOSITION GÉNÉRALE ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE*.

161. *Des forces appliquées aux corps solides.* — Si l'on se reporte à ce qui a été dit aux nos **11** à **14** et suivants de la constitution des corps, du mode d'action des forces et de leur point d'application, il est facile de prévoir que toutes les propositions relatives au travail et à la composition des forces qui agissent sur un point matériel, aux conditions du mouvement uniforme et à l'équilibre, doivent s'étendre aux corps solides composés de molécules ou de points matériels assez fortement unis par les forces moléculaires attractives pour qu'on puisse regarder leur forme comme sensiblement invariable.

Et d'abord, examinons comment les choses se passent quand un corps est animé d'un mouvement général de transport.

162. *Mouvement de transport d'un corps ou d'un système de corps parallèlement à lui-même.* — Le mouvement d'un corps ou d'un système de corps est dit de *transport parallèle* lorsque tous ses points ou toutes ses parties décrivent simultanément des chemins égaux et parallèles, soit dans un temps fini, soit dans un temps très-court ou infiniment petit.

Dans ce mouvement de translation, les chemins élémentaires décrits par tous les points du corps étant égaux, la

---

* Nous empruntons la démonstration des principes exposés aux nos **161**, et suiv. au cours de M. Poncelet, à la Sorbonne, et à l'ouvrage de M. Reisal, intitulé *Éléments de Mécanique*.

somme des travaux élémentaires des forces qui sollicitent le corps dans ce sens, ou le travail élémentaire total développé sur ce corps, est égal à la somme algébrique des projections des forces sur la direction commune des chemins décrits, multipliée par ce chemin élémentaire.

Pour que ce travail élémentaire total soit nul, ou que le mouvement du corps ne soit pas modifié, il faut donc et il suffit que la somme des projections des forces sur la direction du chemin parcouru soit nulle.

Cette somme est d'ailleurs évidemment égale à la résultante de toutes les forces qui tendent à produire la translation. Cette résultante doit donc être nulle pour que le mouvement du corps dans ce sens reste uniforme, ou pour que le corps reste en équilibre dans cette direction.

163. *Cas du mouvement varié.* — Lorsque l'action des forces extérieures a pour effet de produire une variation dans le mouvement de translation du corps, les forces d'inertie se développent et réagissent contre les forces extérieures.

Si l'on désigne par p le poids d'une des masses élémentaires qui composent le corps, la force motrice et d'inertie correspondante à une variation élémentaire de sa vitesse sera

$$f=\frac{p}{g}\cdot\frac{v}{t},$$

et toutes les forces semblables seront parallèles et dirigées dans le sens de la vitesse commune de transport. Leur résultante F sera égale à leur somme, et l'on aura

$$\mathrm{F}=\left(\frac{p+p'+p''+\text{etc.}}{g}\right)\frac{v}{t}=\frac{\mathrm{P}}{g}\cdot\frac{v}{t}=\mathrm{M}\cdot\frac{v}{t},$$

P et M étant respectivement le poids et la masse totale.

Quant au point d'application, toutes les forces d'inertie partielles f, f', f'', sont proportionnelles aux poids p, p',

p'', etc., des différentes parties du corps, et par conséquent le point d'application de leur résultante sera le même que celui du poids total ou que le centre de gravité.

Donc, *dans le mouvement de transport parallèle la force d'inertie totale est*

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{v}{t} = M\frac{v}{t},$$

et son point d'application est le centre de gravité du corps.

Cette conséquence étant d'ailleurs indépendante de l'amplitude du mouvement de transport, elle subsiste encore pour des mouvements finis et pour un instant quelconque du mouvement en ligne courbe.

Mais cette résultante des forces d'inertie développées dans la variation du mouvement est, en vertu du principe de l'action et de la réaction, précisément égale et contraire à celle des forces extérieures qui produisent cette variation, de sorte que F exprime réellement cette résultante, et que la relation entre les forces extérieures et les forces d'inertie dans le mouvement de translation est

$$F = \frac{P}{g}\frac{v}{t} = M\frac{v}{t}.$$

L'accélération $\frac{v}{t}$ produite par la force est donnée par la formule

$$\frac{v}{t} = \frac{F}{M} = \frac{F}{P} \cdot g$$

ce qui montre qu'elle est proportionnelle à la force F et inversement proportionnelle à la masse du corps.

C'est par ce motif que, pour diminuer et pour rendre presque imperceptibles les ébranlements, les vitesses qui sont communiquées aux enclumes par les marteaux, on leur donne un poids considérable et qu'on les fixe sur des blocs de bois de grandes dimensions.

164. *Quantité de mouvement et force vive d'un corps.* — De

même on verra que dans le mouvement parallèle *la quantité de mouvement totale d'un corps* a pour valeur

$$\frac{P}{g}V = MV.$$

Il suit évidemment de là que, pour *qu'un corps ne reçoive qu'un mouvement de transport parallèle, il faut et il suffit que la résultante des forces appliquées passe par son centre de gravité :* car, si elle passait ailleurs, le corps, sollicité d'un côté par cette force, et de l'autre, en sens contraire, par la résultante des forces d'inertie, qui passe par le centre de gravité, tendrait à prendre nécessairement un mouvement de rotation en même temps qu'un mouvement de translation.

Enfin il est encore évident que *la force vive totale communiquée au corps dans le mouvement parallèle est égale à*

$$\frac{P}{g}V^2 = M.V^2,$$

et égale au double de la quantité de travail développée pour la produire.

165. *Travail de la pesanteur dans les systèmes articulés ou composés.* — Le travail de toutes les composantes étant égal à celui de la résultante, il s'ensuit que dans les mouvements des corps ou des systèmes articulés pesants on pourra substituer le travail total de la résultante ou du poids total au travail de tous les poids partiels, et comme le travail de la résultante se mesure par le produit du poids total et du chemin parcouru par son point d'application, il s'ensuit que *dans les machines ou systèmes où il y a des pièces qui, sous l'action de la pesanteur, montent ou descendent, le travail total développé par la pesanteur sera mesuré par le produit du poids total, et de la hauteur dont le centre de gravité général se sera élevé ou abaissé.*

Donc aussi la condition pour que les poids qui descendent fassent sans cesse équilibre aux poids qui montent, ou pour que le travail développé par les uns soit égal au travail dé-

veloppé par les autres, c'est que *le centre de gravité général reste toujours à la même hauteur.* Telle est la condition d'équibre des ponts-levis, des machines à balancier, etc.

Le principe exposé au n° 31 sur la mesure du travail que la pesanteur développe sur un corps qui parcourt une courbe quelconque, en montant ou en descendant, s'applique donc évidemment aussi à un système quelconque de points matériels pesants, puisque dans ce cas le travail développé par la pesanteur sur tous ses points est égal à celui qui correspond à l'élévation du centre de gravité, qui n'est lui-même qu'un point matériel pesant.

166. *Un système de forces quelconques agissant sur un corps solide peut toujours se réduire à deux forces équivalentes, appliquées à deux de ses points et dont l'un serait choisi à volonté.* — Il est d'abord facile de faire voir que les forces proposées peuvent être réduites à trois autres appliquées en trois points quelconques de l'intérieur du corps. Soient en effet F l'une quelconque de ces forces et O son point d'application ; on peut la décomposer en trois autres F_a, F_b, F_c, selon les directions AO, BO, CO et supposer ces composantes transportées aux points d'application A, B et C. Ces trois composantes développeront le même travail que leur résultante. En opérant de même sur toutes les autres forces qui agissent sur le corps, on aura ainsi aux points A, B et C trois groupes de forces concourantes qui auront chacun une résultante unique, et le travail de ces trois résultantes R_a, R_b, R_c, sera égal à la somme des travaux de toutes les forces appliquées au corps.

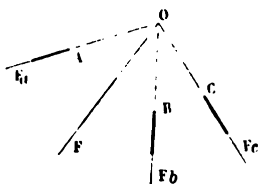


Fig. 60.

De plus, le système des trois forces R_a, R_b, R_c peut être réduit à deux forces équivalentes aux proposées, et dont l'une serait appliquée au point A choisi arbitrairement. En effet, par ce point A et par les directions des forces R_b et

R_c concevons deux plans et supposons d'abord que ces plans ne se confondent pas et qu'ils aient pour intersection la droite AD. Prenons sur cette droite un point A', menons AB et décomposons la force R_b en deux autres, l'une dirigée suivant BA' que nous transporterons en A', l'autre dirigée suivant BA et que nous transporterons en A.

Fig. 61.

Opérons de même sur la force R_c et décomposons-la en deux autres, l'une dirigée suivant CA' et que nous transporterons en A', l'autre dirigée suivant CA et que nous transporterons en A.

Les trois forces R_a, R_b, et R_c pourront ainsi être représentées par deux groupes de forces agissant les unes en A' et ayant une résultante unique R', les autres en A, le point choisi arbitrairement, et ayant aussi une résultante unique R.

Donc, en définitive, le système de toutes les forces qui agissent sur le corps sera remplacé par deux forces équivalentes, dont l'une passe par un point pris arbitrairement dans l'intérieur du corps.

Il est d'ailleurs évident, d'après ce que l'on sait déjà, que le travail de ces deux forces sera égal au travail total de toutes les forces appliquées au corps.

167. *Condition de l'uniformité du mouvement ou de l'équilibre.* — Le mouvement du corps ne sera pas troublé, modifié par l'action de ces deux forces ou de celles qu'elles remplacent, si la quantité de travail développé par l'une est égale et contraire à celle qui est développée par l'autre ; ce qui exige que ces deux forces soient égales et directement opposées l'une à l'autre pour tous les déplacements possibles du corps.

Telle est aussi la condition de l'équilibre, qui n'est qu'un cas particulier du mouvement uniforme.

Réciproquement, *lorsque pour tous les déplacements possibles d'un corps la somme des travaux des forces qui les sollicitent est nulle, ces forces ne modifient pas le mouvement du corps ou sont en équilibre.*

En effet si, parmi tous les déplacements possibles, nous concevons un déplacement élémentaire du corps pour lequel le point d'application A de la force R reste fixe, on pourra regarder ce point comme un centre de rotation, et le point d'application A′ de la force R′ décrira autour de A et du rayon AA′ un arc de cercle, un chemin élémentaire A′*a*′ perpendiculaire à AA′. Mais puisque le travail de la force R est nul par hypothèse, son point d'application ne se déplaçant pas, pour que la somme des travaux élémentaires de R et de R′ soit nulle, il faut aussi que le travail de R′ soit nul; ce qui exige que le chemin A′*a*′ soit perpendiculaire à la direction de la force R′ ou que celle-ci soit dirigée suivant la droite AA′. On ferait voir de même que la force R doit être dirigée suivant la même ligne.

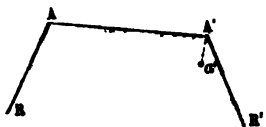


Fig. 62.

Dès lors pour que la somme des travaux élémentaires des deux forces R et R′ dirigées en sens contraire soit nulle, comme on le suppose, il faut que ces forces soient égales et opposées, auquel cas elles ne changeront nullement l'état de mouvement du corps et se feront équilibre.

Donc le mouvement restera uniforme ou le corps en équilibre.

Il résulte de ce qui précède que *trois forces qui ne sont pas dans un même plan ne peuvent se faire équilibre;* car, dans ce cas, la résultante de deux quelconques d'entre elles ne peut être dirigée dans le même sens que la troisième.

DU MOUVEMENT DE ROTATION.

168. *Travail et équilibre des forces dans le mouvement de rotation autour d'un axe fixe.*—L'on a vu n° **122** que quand un point matériel est soumis à l'action de plusieurs forces comprises dans un même plan et qui tendent à le faire tourner autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, le travail de la résultante de ces forces est égal à la somme des travaux des composantes.

On arrive à un résultat semblable dans le cas où les forces ont une direction quelconque par rapport à l'axe de rotation, attendu qu'alors si l'on décompose chacune des forces en deux autres, l'une dirigée dans le sens de l'axe et l'autre comprise dans le plan perpendiculaire à l'axe et passant par le point matériel, il est évident que la composante dirigée dans le sens de cet axe supposé fixe ne pourra produire qu'un mouvement de translation détruit par les appuis de cet axe et que par conséquent le travail de cette force sera nul. Le seul travail développé sera donc celui de la composante contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe. Il en serait de même non-seulement de toutes les forces appliquées à l'un des points matériels du corps, mais encore de celles qui agissent sur les autres parties. L'on n'aura donc à considérer que des forces comprises dans des plans perpendiculaires à l'axe, et, comme le corps est supposé inflexible et rigide, il est, quant à la rotation, tout à fait permis de supposer toutes les forces comprises dans un seul et même plan perpendiculaire à cet axe.

Si l'on nomme

a l'arc élémentaire décrit par un point du corps situé à l'unité de distance de l'axe O, dans l'élément du temps,

r la distance d'un point quelconque m à ce même axe,

L'arc décrit dans ce même temps par le point m sera ra.

Si la force F qui agit sur ce point n'est pas perpendiculaire au rayon Om, l'on pourra la décomposer en deux autres, l'une dirigée dans le sens de ce rayon et qui sera détruite par la résistance du solide parce qu'il n'y a qu'un mouvement de rotation autour de l'axe, et l'autre F', perpendiculaire au rayon, qui produira le seul travail dû à la force F lequel aura pour expression

$$F'ra.$$

Il en sera de même pour toutes les autres forces F_1, F_2 agissant à des distances r_1, r_2 de l'axe, dans des plans perpendiculaires à cet axe. Leur travail respectif sera dû à leurs composantes F'_1, F'_2 perpendiculaires aux rayons.

Il en résulte que le travail total de toutes les forces qui agissent sur le corps correspondant à un déplacement angulaire a mesuré à l'unité de distance aura pour expression

$$a\{F'r + F'_1r_1 + F'_2r_2 + \text{etc.}\}.$$

Ce qui s'exprime en disant que ce travail est égal à la somme des moments des forces extérieures multipliée par l'arc élémentaire qui mesure le déplacement des points situés à l'unité de distance. Il est évident en effet que le produit $F'r$ est égal au moment Fop de la force F, c'est ce qu'il est facile de vérifier sur la figure, et l'on a

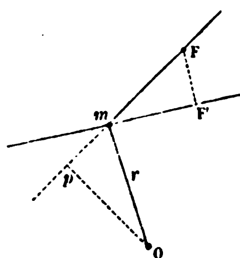


Fig. 63.

$$mF \text{ ou } F : mF' \text{ ou } F' :: om \text{ ou } r : op$$

d'où $$F \times op = F'r.$$

Le travail élémentaire de toutes les forces extérieures ne peut donc être nul, pour un déplacement angulaire quelconque, qu'autant que la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation sera nulle, ce qui

exige que le moment de leur résultante le soit aussi ou qu'elle passe par l'axe de rotation.

Ce que nous venons de dire pour un axe considéré isolément s'applique à tout autre axe de rotation, et par conséquent, pour que des forces appliquées à un corps invariable, se fassent mutuellement équilibre ou ne produisent aucun mouvement de rotation, il faut que la condition ci-dessus soit satisfaite pour un axe de rotation quelconque.

169. *Conditions générales de l'uniformité du mouvement ou de l'équilibre d'un corps solide, libre dans l'espace, soumis à des forces quelconques.* — Il est évident qu'un corps solide entièrement libre ne peut recevoir et prendre que l'un des trois mouvements suivants :

Un mouvement de translation sans rotation, un mouvement de rotation sans translation, un mouvement simultané de translation et de rotation.

Tout mouvement de translation peut être décomposé en trois autres mouvements semblables par rapport à trois axes rectangulaires quelconques menés dans l'espace et il est évident que si chacun de ces mouvements composants est séparément nul, le mouvement résultant de translation le sera aussi, puisqu'il serait représenté par la diagonale d'un parallélipipède dont les côtés seraient nuls. Cette condition est d'ailleurs nécessaire et suffisante.

Or, pour que ces trois mouvements suivant chacune des axes soient nuls il faut que les sommes des composantes parallèles à ces axes qui les produiraient soient séparément nulles (n° **124**). Donc en définitive si l'on nomme X, Y et Z les sommes des composantes des forces extérieures appliquées au solide invariable que l'on considère, ces forces n'imprimeront au corps aucun mouvement de translation si l'on a en même temps

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,$$

le mouvement restera uniforme ou le corps en équilibre quant à la translation.

De même tout mouvement de rotation d'un corps ou des points matériels qui le composent peut être décomposé en trois mouvements de rotation autour de trois axes rectangulaires menés par un point quelconque. Pour que le corps ne reçoive aucun mouvement de rotation il faut et il suffit que les rotations autour de chacun de ces trois axes soient séparément nulles, ce qui exige que les sommes des moments des forces par rapport à chacun de ces trois axes soient séparément nulles, de sorte que si l'on nomme L, M et N ces trois sommes, on devra avoir en même temps

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0.$$

Quand ces conditions seront satisfaites, le travail développé pour imprimer au corps un mouvement de rotation sera nul et il continuera à se mouvoir uniformément ou restera en équilibre.

Pour que le corps ne reçoive ni mouvement de translation ni mouvement de rotation ou que par conséquent son mouvement ne soit nullement altéré, il faut et il suffit donc

1° Que les sommes de toutes les composantes des forces qui sollicitent le corps, par rapport aux trois axes rectangulaires quelconques menés dans l'espace soient séparément nulles.

C'est ce qu'expriment les relations

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,$$

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

que l'on nomme les six équations du mouvement uniforme ou de l'équilibre d'un corps invariable libre sollicité par des forces quelconques.

170. *De la force centrifuge.* — Tout le monde sait que quand on attache une pierre, un corps pesant quelconque à une corde, si en tenant cette corde à la main on imprime au corps un mouvement circulaire dont cette main est le

centre, la corde éprouve une tension d'autant plus grande, que le mouvement est plus rapide. C'est sur l'observation de ce fait qu'était fondé l'usage de la fronde, dont les peuples de l'antiquité se servaient comme arme de guerre, et qui n'est plus qu'un jouet d'enfant. Des effets analogues s'observent dans les voitures qui tournent rapidement dans des courbes de petits rayons; dans les manéges, où les chevaux et les cavaliers sont naturellement conduits à se pencher vers le centre de la courbe qu'ils décrivent pour ne pas être renversés. Nous pourrions citer, et le lecteur trouverait facilement bien d'autres effets de la même cause. Tous prouvent que dans le mouvement curviligne les corps sont soumis à une force particulière qui tend à les éloigner du centre, et que l'on nomme la *force centrifuge*.

171. *Mesure de la force centrifuge.* — Pour comprendre ce qui se passe quand un point matériel est soumis à l'action de la force centrifuge, examinons d'abord comment cette force se développe dans les mouvements circulaires.

Lorsqu'un point matériel ou une masse élémentaire m passe d'un élément de courbe ab qu'il vient de parcourir à un autre, il tend, en vertu de son inertie, à continuer de se mouvoir dans le sens du prolongement de cet élément ou de la tangente bd à la courbe, c'est ce que l'on appelle *s'échapper par la tangente*, et ce qui arrive dans la fronde au moment où l'on cesse brusquement de tenir la corde tendue.

Si la masse m prend la direction de l'élément suivant, c'est qu'elle est retenue sur la courbe, soit par la résistance de la courbe elle-même sur laquelle elle exerce alors une pression, soit par la tension qu'elle développe dans la corde. Cette pression, cette tension est la mesure même de la force centrifuge, et on la nomme quelquefois par opposition la force centripète.

Cette force est dirigée dans le sens du rayon de courbure de la courbe ou du cercle correspondant; et si l'on nomme

V la vitesse dont la masse m est animée dans la direction de ab, et qu'on prenne la longueur bd pour la représenter, il est clair que la vitesse détruite par la résistance de la corde ou la force centripète, sera représentée par le côté dc du parallélogramme $bcdf$, dont le côté dc est parallèle au rayon ob suivant la direction duquel s'exerce cette force. Or, l'inspection de la figure montre d'abord que les angles $ab\mathrm{O}$ et bdc sont égaux comme interne et externe, et les angles dcb et $cb\mathrm{O}$ comme alterne et interne; et comme d'ailleurs les angles $cb\mathrm{O}$ et $a\mathrm{O}b$ sont égaux comme formés, de part et d'autre du rayon, par deux éléments égaux et consécutifs du cercle ou du polygone d'un nombre infini de côtés qui le remplace, il s'ensuit que les angles bdc et dcb sont égaux, et le triangle bdc isocèle. Donc, enfin, la vitesse ba, avec laquelle la masse m se meut dans le sens de l'élément suivant bt, est la même que celle qu'elle avait dans le sens de l'élément précédent. Ainsi, ***dans le mouvement circulaire, la force centrifuge n'altère pas la vitesse de rotation;*** ce qui est d'ailleurs conforme aux principes que nous avons exposés sur le travail, puisque cette force dirigée dans le sens du rayon, ou normalement au chemin décrit, ne produit pas de travail dans le sens du mouvement, attendu qu'il n'y a pas de chemin parcouru dans sa direction propre et par son action.

Fig. 64.

Cela posé, la vitesse détruite dans l'élément de temps t par la force centripète, a, d'après la figure, dc pour mesure, et les forces centripète et centrifuge qui sont égales et directement opposées, ont pour mesure commune

$$\mathrm{F} = m \cdot \frac{dc}{t}.$$

Or, les triangles bde et Obt sont semblables comme ayant les angles égaux; l'on a donc

$$bO : bt :: bd : dc,$$

d'où
$$dc = \frac{bd \times bt}{bO} = \frac{Vs}{R}.$$

En appelant R le rayon du cercle décrit, et s l'arc élémentaire parcouru dans l'élément de temps t; et comme on a

$$V = \frac{s}{t}, \quad \text{d'où} \quad s = Vt,$$

il s'ensuit que
$$dc = \frac{V \times Vt}{R} = \frac{V^2 t}{R};$$

et enfin que la force centrifuge a pour mesure

$$F = m\frac{V^2 t}{R \cdot t} = m\frac{V^2}{R};$$

si d'ailleurs on appelle V_1 la vitesse angulaire ou à l'unité de distance, on a, comme on sait, $V = V_1 R$, et l'expression de la force centrifuge devient

$$F = m\frac{V_1^2 R^2}{R} = mV_1^2 R.$$

Ce que nous venons de dire de la force centrifuge dans le cercle s'applique au cas où le point matériel décrit une ligne courbe quelconque, parce qu'en chacune de ses positions l'on peut substituer à la courbe le cercle qui lui est osculateur; la seule différence, c'est que le rayon R de ce cercle varie pour chaque position du mobile, au lieu que dans le cercle il est constant.

172. *Travail développé par la force centrifuge.* — Lorsqu'au lieu d'être retenu par une courbe circulaire ou à une distance constante du centre de rotation, le point matériel que l'on considère peut s'en éloigner, la force centrifuge lui faisait parcourir dans le sens du rayon un certain chemin;

elle développe sur ce corps un travail qu'il est facile d'apprécier.

En effet, si dans un élément de temps le point matériel se déplace dans le sens du rayon d'une quantité élémentaire V, le travail correspondant de la force centrifuge sera

$$Fr = mV_1^2Rr,$$

et le travail total dû à cette force, quand le point matériel sera passé de la distance R″ du centre à une distance plus grande R′, sera donné par la somme de tous les travaux élémentaires analogues pris depuis $R=R''$ jusqu'à $R=R'$. Or on a vu par des exemples précédents que cette somme est égale à

$$\frac{1}{2}mV_1^2(R'^2-R''^2)=\frac{1}{2}m(V'^2-V''^2)$$

si l'on nomme $V'=V_1R'$ et $V''=V_1R''$ les vitesses de rotation du point autour du centre. On a donc pour le travail cherché de la force centrifuge

$$T=\frac{1}{2}mV_1^2(R'^2-R''^2)=\frac{1}{2}m(V'^2-V''^2).$$

On remarquera que le second membre de cette relation n'est autre chose que la variation de la force vive de rotation éprouvée par le point matériel quand, tout en s'éloignant du centre de rotation, il continue de participer à ce mouvement, quelle que soit d'ailleurs la courbe ou le chemin qu'il décrit en s'éloignant du centre. On aurait donc pu déduire directement cette expression du principe des forces vives.

Dans le cas que nous venons de considérer, la force centrifuge tend à augmenter la vitesse absolue du mobile et agit ainsi comme une force motrice qui se développe dans le mouvement de rotation.

Lorsqu'au contraire le corps se rapproche du centre la force centrifuge s'y oppose et agit comme une résistance en développant un travail qui a d'ailleurs la même expression

mais qui est résistant, puisque le chemin parcouru est en sens contraire du sens d'action de la force.

Les considérations précédentes trouveront leur application dans l'étude des effets de certains récepteurs hydrauliques.

173. *Action de la force centrifuge sur les voitures.* — Lorsqu'une voiture marchant rapidement tourne dans une courbe de petit rayon, les effets de la force centrifuge se font sentir aux voyageurs qui sont alors poussés vers la courbe extérieure avec une intensité qui peut être souvent dangereuse pour ceux qui sont placés sur l'impériale et qui peut même le devenir pour la stabilité de la voiture.

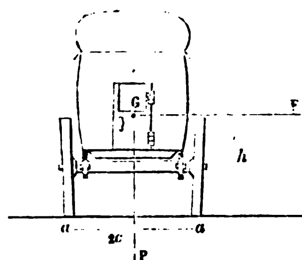


Fig. 65.

L'on s'est souvent préoccupé des effets de cette force sur les chemins de fer lorsque l'on a proposé d'employer des courbes de petit rayon; mais il est facile de faire voir par des chiffres que, sous ce rapport, les plus grandes vitesses de marche et les rayons ordinaires des courbes ne présentent aucun danger.

En nommant en effet :

P le poids d'un wagon ou d'une voiture quelconque,

h la hauteur de son centre de gravité au-dessus du plan de la voie,

$F=\frac{P}{g}V_1^2R$ la force centrifuge,

$2e$ la largeur de la voie.

Il est évident que quand la voiture circule autour du centre O de la voie et qu'elle est arrêtée par un obstacle, tel qu'une ornière ou le rebord d'un rail, elle tend à se renverser au dehors en tournant autour de son point d'appui instantané *a*. Ce mouvement de renversement est contrebalancé par le poids P du véhicule, et au moment où ce

poids et la force centrifuge se font équilibre autour de ce point, l'on a entre les moments des deux forces P et $F=\frac{P}{g}V_1^2R$ la relation

$$Pc=\frac{P}{g}V_1^2R.h,$$

ce qui montre qu'à vitesse et à poids égaux la stabilité de la voiture sera d'autant plus grande et l'équilibre mieux assuré, que la largeur $2c$ de la voie sera plus grande par rapport à la hauteur du centre de gravité.

La vitesse de parcours qui correspondrait à cet équilibre sur les voies ordinaires, pour lesquelles $2c=1^m,45$, pour les voitures dont le centre de gravité serait à $1^m,00$ de hauteur quand elles sont chargées et dans des courbes de 400 mètres de rayon, serait donnée par la relation

$$V_1^2R=\frac{gc}{h}, \quad \text{d'où} \quad V_1R=\sqrt{\frac{g.c}{h}}R=47^m,50$$

environ, vitesse que l'on n'atteint pas à beaucoup près dans les mouvements les plus rapides des chemins de fer. Ce qui montre que sous ce rapport la force centrifuge n'occasionne pas de danger. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'elle appuie les rebords des roues extérieures contre les rails, produit un cisaillement qui les use et peut contribuer puissamment à des déraillements.

174. *Action de la force centrifuge dans les volants.* — Dans les machines soumises à des causes périodiques d'irrégularité dans le mouvement, on emploie pour limiter ces irrégularités des pièces rotatives, d'un poids et d'un diamètre considérables, animées d'une assez grande vitesse et sur lesquelles le mouvement de rotation développe une force centrifuge d'une intensité considérable.

Ainsi, par exemple, le volant d'un laminoir à fer établi aux forges de Fourchambault pèse 6000 kilogrammes; son rayon est de $2^m,92$.

Le nombre de tours qu'il fait est de 60 en 1' ou 1 par seconde;

L'on a donc $V_1 = 6^m,28$ en 1'' et par suite $V_1R = 6.28 \times 2.92$.

Si l'on considère un segment de l'anneau égal à $\frac{1}{8}$ de sa circonférence, correspondant à un seul bras, son poids sera de 1000 kilogrammes ; et si son assemblage avec les segments voisins était rompu, le bras éprouverait dans le sens de sa longueur une traction exprimée par

$$\frac{1000}{9,8} \times \overline{6,28}^2 \times 2,92 = 11\,739 \text{ kilogrammes},$$

ce qui montre que dans les volants la force centrifuge acquiert une intensité dangereuse et qu'il convient d'assurer à leur assemblages la plus grande solidité.

On remarquera aussi que la vitesse de rotation de ces organes doit être renfermée dans certaines limites. Car, si par exemple on voulait faire marcher le volant précédent à une vitesse double, ou de 120 tours en 1', la force centrifuge du segment que nous avons considéré deviendrait quadruple ou égale à 46 956 kilogrammes.

175. *Application au mouvement de l'eau contenue dans un vase qui tourne autour d'un axe vertical.* — Dans ce cas les molécules du liquide sont simultanément soumises à l'action verticale de leur propre poids et à celle que la force centrifuge développe horizontalement. Pour qu'elles restent en équilibre sous l'action de ces deux forces, il faut que la résultante de celles-ci soit normale à la surface qu'affecte la masse fluide, car si cette résultante était inclinée à la surface les molécules glisseraient sous son action oblique.

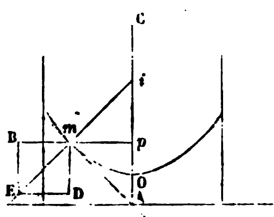


Fig. 66.

Cela posé, considérons une molécule m de poids p et de masse $\frac{p}{g}$ située à la distance $mp = R$ de l'axe de rotation AC.

Elle sera soumise dans le sens horizontal et perpendiculairement à l'axe à une force centrifuge exprimée par $\frac{p}{g}V_1^2R$.

Prenons $mB = \frac{p}{g}V_1^2R$, $mD = p$ et construisons le parallélogramme $mBED$ dont la diagonale normale à la surface qu'affecte le fluide, rencontre l'axe en i. Les triangles semblables mpi et mBE nous donnent

$$mB \text{ ou } \frac{p}{g}V_1^2R : BE \text{ ou } p :: mp \text{ ou } R : pi,$$

d'où
$$pi = \frac{g}{V_1^2}.$$

Ainsi la distance pi, qu'on nomme la sous-normale, ne dépend que du nombre constant g et de la vitesse angulaire supposée aussi constante. Par conséquent cette distance est constante, ce qui, d'après les propriétés connues de la parabole, montre que la courbe génératrice de la surface du niveau est une parabole dont le sommet est au point O et dont l'axe est celui de rotation; et il serait facile de faire voir que son paramètre est $\frac{2g}{V_1^2}$ attendu que l'on a

$$pp' \text{ ou } 2x : mp \text{ ou } y :: mp \text{ ou } y : pi \text{ ou } \frac{g}{V_1^2},$$

d'où
$$y^2 = \frac{2g}{V_1^2}x.$$

176. *Surface de niveau de l'eau contenue dans un auget de roue hydraulique à axe horizontal.* — En raisonnant de même que dans le cas précédent, il est facile de voir que si l'on représente par ab la force centrifuge $\frac{p}{g}V_1^2R$ et par ad le poids p d'une molécule quelconque située à la surface du niveau, l'on aura la proportion

$$ab \text{ ou } \frac{p}{g}V_1^2R : bc \text{ ou } p :: R : OI,$$

d'où
$$OI = \frac{g}{V_1^2};$$

ce qui montre que la distance OI est constante pour tous les points de la surface du liquide et que par conséquent cette

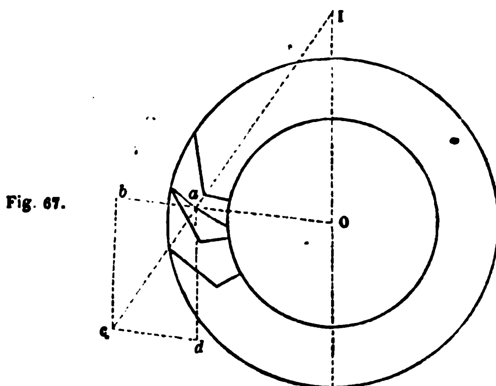


Fig. 67.

surface est celle d'un cylindre à base circulaire de rayon *a*I dont l'axe est parallèle à celui de la roue.

Ce théorème, dû à M. Poncelet, sert de base à la théorie que cet illustre ingénieur a donnée des effets de l'eau dans les roues à augets à grande vitesse *.

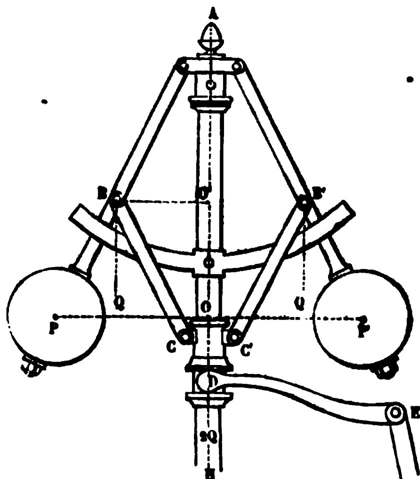
177. *Du régulateur à force centrifuge.* — L'action de la force centrifuge est utilisée dans la construction d'un appareil que l'on nomme *régulateur à force centrifuge*, ou *régulateur à boules*. Il consiste principalement en un axe vertical AH, figure 68, qui reçoit de la machine dont on veut régulariser la marche un mouvement de rotation. A cet axe sont suspendues deux tiges AP et AP', articulées en A, et terminées par des poids égaux P et P' en forme de sphères ou de lentilles. Aux deux points B et B' des tiges AP et AP' sont articulées deux autres tiges égales BC et B'C' formant avec les premières un losange, et qui s'articulent aussi à leurs extrémités C et C' avec un manchon traversé par l'axe vertical avec lequel il tourne, tout en pouvant avoir un mouvement

* Voir les *Leçons sur l'hydraulique.*

de translation dans le sens de la longueur de cet arbre. Ce manchon a une gorge dans laquelle s'engage la fourche d'un levier DE, qui agit sur les organes du distributeur de la vapeur, ou sur toute autre pièce.

On comprend facilement le jeu de cet appareil : par l'effet du mouvement de rotation de l'arbre vertical, les boules du régulateur tendent à s'écarter de cet axe et obligent le manchon à s'élever à une certaine hauteur. Si la machine a atteint et conserve sa vitesse normale, les boules et le

Fig. 68.



manchon se maintiennent à la même position, parce qu'il s'établit un état d'équilibre entre la force centrifuge et le poids des diverses pièces de l'appareil. Quand la vitesse augmente, il en est de même de la force centrifuge, qui tend à écarter davantage les boules et à relever le manchon, et par suite l'extrémité du levier DE. A l'inverse, si la vitesse diminue, les boules se rapprochent de l'axe, le manchon et l'extrémité D du levier DE s'abaissent.

Examinons maintenant les conditions mécaniques de la marche de cet appareil, et supposons d'abord que le manchon CC', ainsi que les tiges BC et B'C' soient équilibrés par

le levier DE, de façon qu'en négligeant les frottements on puisse regarder les tiges AB et AB' comme libres d'obéir à la force centrifuge qui tend à les écarter, et à la pesanteur des boules, qui tend à les rapprocher de l'axe vertical.

La force centrifuge de chaque boule est $\frac{P}{g}V_1^2 \times OP$, et son moment par rapport à l'axe des articulations A est

$$\frac{P}{g}V_1^2 \times OP \times AO.$$

Le moment du poids P de chaque boule par rapport au même axe est

$$P \times OP.$$

Par conséquent, la condition d'équilibre de chacune d'elles est

$$\frac{P}{g}V_1^2 \times AO = P, \quad \text{d'où} \quad \frac{V_1^2}{g} = \frac{1}{AO};$$

ce qui montre que la distance à laquelle les boules s'écartent de l'axe ne dépend pas de leur poids, mais seulement de la vitesse angulaire de rotation, et permet de disposer du poids des boules pour satisfaire à d'autres conditions.

Si l'on nomme T la durée de la révolution des boules autour de l'axe vertical, l'on a $V_1T = 2\pi = 6.28$

d'où $$V_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{et par suite} \quad \frac{4\pi^2}{gT^2} = \frac{1}{AO},$$

d'où $$T = 2\pi\sqrt{\frac{OA}{g}},$$

ce qui est le double de la durée des oscillations d'un pendule qui aurait pour longueur la hauteur AO, à laquelle les boules s'élèveraient à la vitesse normale.

La formule ci-dessus permet de déterminer approximativement la hauteur AO à laquelle les boules s'élèveront en

tournant à une vitesse donnée, ce qui fixe leur position moyenne. Elle donne en effet

$$AO = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0,2484.T^2;$$

ainsi pour

$T = 1''$	$T = 2''$
$AO = 0^m,2484$	$AO = 0,9936.$

On remarquera que dans ce calcul l'on a négligé le poids et la force centrifuge des tiges AB et AB'.

Ce qui précède ne suffit pas pour assurer l'action du pendule comme appareil régulateur, puisqu'il faut qu'il puisse faire mouvoir le levier DE et les organes de distribution de la vapeur ou de l'eau, que ce levier doit conduire, ou, en d'autres termes, vaincre les résistances qu'éprouve le mouvement du manchon, quand les boules doivent s'écarter ou se rapprocher. Ces résistances peuvent s'évaluer ou se mesurer lorsque l'appareil est construit, et si nous appelons

2Q la force verticale appliquée au manchon dans la direction de l'axe vertical,

$V'_1 = (1+n')V_1$ une autre vitesse angulaire plus grande, par exemple, que la vitesse moyenne V_1 d'une fraction n' de celle-ci.

Il est facile de voir que la force 2Q peut être décomposée en deux autres forces parallèles et égales à Q, appliquées en chacune des articulations B et B', et qu'alors on aura pour l'équilibre correspondant à ces nouvelles conditions, à l'instant où il va être rompu, la relation

$$\frac{P}{g}V'^2_1 \times OP \times AO = P \times OP + Q \times BO'.$$

En appelant a la distance $AB = AB'$, et b la longueur $AP = AP'$ des tiges jusqu'au centre des boules, on remarquera que

$$b : a :: OP : BO', \quad \text{d'où} \quad BO' = \frac{a}{b}.OP,$$

et par suite
$$\frac{PV'^2_1}{g}.AO = P + Q \cdot \frac{a}{b}.$$

Or on a trouvé précédemment que la valeur de AO correspondante à la position moyenne des boules était

$$AO=\frac{g}{V_1^2},$$

la relation ci-dessus devient donc

$$P\frac{V_1'^2}{V_1^2}=P+Q\frac{a}{b},$$

d'où l'on tire

$$\frac{P}{Q}=\frac{a}{b}\frac{V_1^2}{V_1'^2-V_1^2}=\frac{a}{b(2n'+n'^2)}=\frac{a}{2bn'},$$

attendu que n'^2 doit toujours être très-petit par rapport à n'.

L'on voit donc, d'après ces considérations, dues à M. Poncelet, qu'il existe une relation nécessaire entre le rapport du poids des boules à la résistance et le degré de régularité auquel l'appareil doit être sensible.

On voit aussi que pour un degré de régularité voulu ou reconnu nécessaire à la marche de la machine le poids des boules croît proportionnellement à la résistance qu'oppose ou qu'éprouve le manchon. Ainsi, par exemple, si l'on a les proportions $a=0,666$, et si l'on doit avoir $n'=\frac{1}{50}=0,02$, on trouve

$$\frac{P}{Q}=\frac{0,66}{2\times 0,02}=16,5.$$

De sorte que si la résistance du manchon était seulement de 10 kilogrammes, le poids de chacune des boules devrait être

$$P=5^{kil}\times 16,5=82^{kil},5.$$

Ce résultat montre que cet appareil ne saurait donner aux machines un grand degré de régularité sans acquérir des dimensions et un poids excessifs, si l'on voulait faire surmonter directement par le manchon des résistances un peu considérables.

C'est faute d'avoir eu égard à ces circonstances que beau-

coup de constructeurs ont échoué dans l'établissement de ce genre de régulateur, qu'ils ont voulu faire agir pour imprimer le mouvement à des vannes ou à des appareils de distribution de vapeur. On évite cet inconvénient grave et l'on parvient à obtenir avec cet appareil, simple et solide, un degré de régularité convenable, en le disposant de la manière suivante, que je décrirai pour le cas d'une roue hydraulique.

178. *Disposition à donner au régulateur à force centrifuge.* — L'arbre vertical du régulateur porte une roue conique *aa'* qui engrène avec une roue *bb'* de même diamètre, fixée sur un arbre horizontal *cc'*, qui fait par conséquent le même nombre de tours que l'arbre AH. Cet arbre porte à frottement

Fig. 69.

doux deux roues, dentées à engrenages coniques *ee'* et *ff'*, munies d'un embrayage à griffes qui peut engrener avec un manchon *dd'* mobile sur l'arbre *cc'* dans le sens de sa longueur. Il résulte de cette disposition que ces deux roues *ee'* et *ff'* ne participent au mouvement de rotation de l'arbre *cc'* que quand elles sont embrayées avec le manchon *dd'*.

Ces deux roues engrènent toutes deux avec une troisième roue *gg'* de même diamètre, placée à l'extrémité de l'arbre horizontal d'une vis sans fin perpendiculaire à l'arbre *cc'*.

Il suit de cette disposition que lorsque le manchon d'embrayage conduit l'une ou l'autre des roues *ee'* ou *ff'*, la roue *gg'* et la vis sans fin tournent dans un sens ou dans l'autre. L'office du pendule conique se réduit donc, dans ce dispositif, à faire glisser le manchon d'embrayage *gg'* de droite à gauche ou de gauche à droite, selon que le mouvement s'accélère ou se retarde, et la seule résistance qu'il ait à vaincre est celle du frottement de ce manchon sur son arbre et contre les griffes, laquelle est assez faible et diffère peu, d'une roue ou d'un moteur à un autre. La résistance principale, celle de la manœuvre de vanne, par exemple, est surmontée par le moteur lui-même, qui conduit la vis sans fin, et c'est ce dernier organe qui, par des engrenages convenablement proportionnés, fait monter ou descendre la vanne.

Un autre avantage de ce dispositif, c'est que le même modèle de régulateur peut servir dans presque tous les cas, pourvu que la vitesse de l'arbre vertical des boules soit aussi la même.

Plusieurs régulateurs de ce genre, établis pour les usines de l'artillerie, y ont donné des résultats satisfaisants. En voici les proportions principales pour le cas d'une roue à aubes planes emboîtées dans un coursier circulaire, et dont la vanne en déversoir a 2 mètres de largeur.

L'arbre horizontal, *cc* fig. 70, reçoit le mouvement de la roue au moyen d'une poulie fixe et d'une courroie, et fait à la marche normale de la machine 48 tours en 1 minute. Il en est par conséquent de même de l'arbre vertical du régulateur auquel le mouvement est transmis par les deux roues coniques *aa'*, *bb'*, de la figure 69, qui ont chacune 24 dents.

Chaque boule pèse $21^{kil},20 = P$, et a $0^m,175$ de diamètre.

On a $a = AB = AB' = 0^m,25$, fig. 68, $b = AP = AP' = 0^m,4875$. Le poids des tiges AP et AP' est de $2^{kil},95$, celui des tiges $BC = B'C'$ est de $1^{kil},120$.

L'expérience a donné pour l'effort à exercer sur les boules horizontalement, pour soulever le collier et le levier, une intensité de 36 kilogrammes.

Les trois roues d'angle *ee'*, *ff'*, *gg'* ont 30 dents chacune.

La vis sans fin est à un seul filet.

La roue à dents héliçoïdes LL, fig. 70, qu'elle conduit a 90 dents.

Le pignon MM fig. 69, que porte l'arbre de cette roue a 16 dents.

La roue NN que conduit ce pignon a 80 dents.

Le pignon de la crémaillère, monté sur le même arbre, a 24 dents.

Le pas de l'engrenage de la crémaillère est de $0^m,023$.

Il résulte de ces proportions qu'en nommant N le nombre

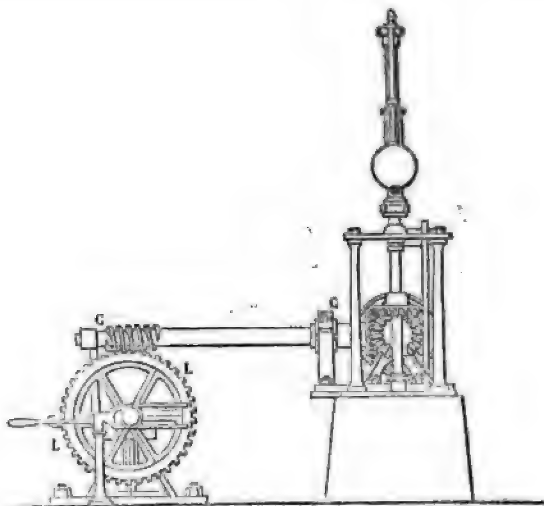


Fig. 70.

de tours de l'arbre vertical et de l'arbre de la vis, qui sont les mêmes, celui que fera l'arbre du pignon sera

$$\frac{N}{90} \times \frac{16}{80} = \frac{N}{90 \times 5} = \frac{N}{450}.$$

Si l'on suppose N=10, le pignon qui a 24 dents, fera monter la crémaillère dont le pas de l'engrenage est $0^m,023$ de

$$\frac{10}{450} \times 24 \times 0^m,023 = 0^m,0123.$$

Ainsi, pour dix tours de l'arbre vertical du régulateur, la vanne monte ou descend de $0^m,0123$.

Ce rapport entre les courses de la vanne et le nombre de tours de l'arbre vertical du régulateur est important à noter, et dans les applications que l'on voudra faire de cet appareil, il sera convenable de s'en rapprocher pour les roues analogues par les motifs que nous indiquerons au n° 181.

179. *Résultats d'observations faites sur l'effet de ce régulateur.* — La longueur du manchon mobile *dd'* étant moindre que l'intervalle qui sépare les roues *ee'* et *ff'* il s'ensuit que dans ces intervalles tant que le manchon n'embraye ni avec l'une ni avec l'autre de ces roues, l'appareil est indifférent aux variations de vitesse. On conçoit qu'en effet il faut conserver une certaine latitude à cet égard. La vitesse moyenne entre ces limites est la vitesse normale de la roue, elle est d'environ 9,80 tours en 1 minute.

Quand la vitesse s'abaisse à 9,50 tours en 1 minute les entailles du manchon sont sur le point de s'engager dans celles de la roue *ee'*; lorsque la vitesse s'élève à 10,10 tours en 1 minute les entailles du manchon sont sur le point de s'engager dans celles de la roue *ff'*. C'est entre ces limites de 9,50 et 10,10 tours en 1 minute que la vitesse peut varier sans que le régulateur agisse. La moyenne de ces vitesses est 9,80 tours en 1 minute. L'écart en dessus et en dessous de la vitesse moyenne peut donc être de 0,30 tours en 1 minute ou de $\frac{1}{32,6}$ de la vitesse moyenne avant que le régulateur commence à agir.

Lorsque par une élévation du niveau ou par une diminu-

tion de la résistance à vaincre la vitesse de la roue dépasse 10,1 tours en 1 minute, le manchon embraye avec la roue ff' qui alors conduit la roue gg' et la vis sans fin de manière à relever l'avance et à diminuer la vitesse. Pour que cette vitesse revienne à sa valeur normale il faut que l'action du régulateur dure un certain temps. En fermant brusquement toutes les vannes des usines placées sur le même canal pour obtenir un exhaussement rapide du niveau on a pu augmenter la vitesse jusqu'à 11,1 tours en 1 minute. L'écart maximum en sus de la vitesse moyenne que l'on ait pu produire a donc été de 1,3 tour en 1 minute ou $\frac{1}{7,5}$ de la vitesse moyenne et il a fallu 50 à 60 secondes d'action du manchon pour ramener la vitesse à 10,1 tour en 1 minute à laquelle il débraye.

Lorsque par suite d'une augmentation dans la résistance ou d'un abaissement de niveau, la vitesse de la roue a atteint 9,5 tours en 1 minute, le manchon embraye avec la roue ee', qui alors conduit la roue gg' et la vis en sens contraire, pour faire abaisser la vanne et ramener la vitesse à sa valeur moyenne.

En produisant exprès un abaissement brusque du niveau d'amont, on a pu faire descendre la vitesse de la roue à 8 tours en 1 minute, ce qui correspond à un écart de 1,8 tour en 1 minute ou $\frac{1}{5,5}$ de la valeur moyenne. Mais, par l'action du régulateur, la roue est revenue à la vitesse de 9,50 tours par minute au bout de 30 secondes.

L'on voit par ces détails que ce régulateur manœuvre d'une manière assez sensible pour être employé très-utilement dans beaucoup de cas.

180. *Comparaison des données de l'expérience avec les formules.* — Les résultats des observations directes faites sur le régulateur à boules de la poudrerie Du Bouchet nous fournissent le moyen de vérifier l'exactitude des formules du n° 177.

Nous avons vu en effet qu'au delà de la vitesse de 10,1 tours en 1 minute, ou quand la vitesse dépassait de $\frac{1}{32}$ sa valeur moyenne, le manchon s'embrayait avec la roue ff' pour ralentir le mouvement et qu'il débrayait à cette même vitesse, quand, après un accroissement supérieur à celui-là, la vitesse tend à revenir à sa valeur normale.

Or, la vitesse normale du régulateur est de 48 tours de son arbre vertical et, pour un accroissement de $\frac{1}{32} = n'$, elle devient de 49 tours en 1 minute, ce qui correspond à une vitesse angulaire égale à $\frac{6,28}{60} \times 49,5 = 5^m,27$ en 1 seconde. On a alors $OP = 0^m,30$ à peu près.

Par conséquent la force centrifuge de chaque boule devient

$$\frac{P}{g} V_1^2 \times OP = \frac{21^{kil},20}{9,81} \times (5,27)^2 \times 0,30 = 18^{kil},00,$$

ce qui, pour les deux boules, donne un effort de 36 kil., précisément égal à celui que des observations directes ont indiqué pour soulever le collier et le levier d'embrayage.

181. *Modification du poids des boules pour obtenir une plus grande régularité.* — Si pour certains cas l'on voulait donner à l'appareil plus de sensibilité, il suffirait d'augmenter le poids des boules ; sachant que, pour le régulateur qui nous occupe, l'effort à exercer par les boules est de 36 kil. ou 18 kil. par chacune, si le degré de régularité n' devait être $\frac{1}{50}$ de la vitesse moyenne, le nombre de tours de l'arbre des boules, au moment où le régulateur commencerait à agir, devrait être $48 + \frac{48}{50} = 48,96$. Par suite

$$V_1 = \frac{6,28}{60} \times 48,96 = 4^m,945.$$

En admettant que $OP = 0^m,30$, on aurait pour déterminer le nouveau poids P des boules

$$\frac{P}{9,81} \times \overline{4,945}^2 \times 0,30 = 18^{kil}.$$

d'où
$$P = \frac{18 \times 9,81}{(4,945)^2 \times 0,30} = 24^{kil},07.$$

182. *Observation relative à la transmission du mouvement de la vis sans fin à la vanne.* — Dans les premières applications qui ont été faites des régulateurs de ce genre, l'on remarquait qu'ils étaient sans cesse en jeu et que la vanne était continuellement en mouvement pour s'élever et pour s'abaisser, de sorte que la marche de la roue était fort irrégulière et s'écartait beaucoup en plus ou en moins de sa vitesse moyenne. Cet inconvénient, qui avait été reconnu déjà dans beaucoup d'autres applications, avait conduit les constructeurs à regarder le régulateur à boules comme défectueux et comme plus nuisible qu'utile à la régularité du mouvement. Mais en examinant de plus près les circonstances de sa marche et de celle de la vanne, je reconnus que les variations perpétuelles de vitesse provenaient de ce que les mouvements communiqués à la vanne étaient trop grands, de sorte qu'elle s'abaissait ou s'élevait trop rapidement et toujours au delà de la limite qui convenait pour la marche moyenne, et qu'alors aux irrégularités du mouvement inhérentes au mode d'action de la machine, aux variations du niveau des eaux, etc., s'ajoutaient sans cesse celles que produisaient les mouvements exagérés de la vanne. Je fis changer les transmissions de mouvement de la vis à la vanne, de manière à ralentir beaucoup le mouvement de celle-ci, et je parvins ainsi à renfermer les variations de la vitesse dans des limites convenables.

Des observations analogues ont été faites à l'une des grandes aiguiseries de la manufacture d'armes de Châtellerault sur l'effet d'un régulateur appliqué à une turbine, et l'on est parvenu à bien régler la marche de ce moteur en

établissant un rapport convenable dans la transmission du mouvement de la vis à la vanne.

D'après ces observations l'on a reconnu que quand l'arbre vertical du régulateur et celui de la vis sans fin sont réglés à une vitesse moyenne de 48 tours en 1 minute, les vannes en déversoir des roues de côté ne doivent pas s'élever ou s'abaisser de plus de 10 à 15 millim. pour 10 tours de la vis sans fin, et que pour les turbines Fontaine, par exemple, la course des vannes ne doit pas s'éloigner beaucoup de $1^{mill},5$ à $2^{mill},0$ pour dix tours de la vis.

En satisfaisant à ces conditions, par des rapports convenables dans les transmissions de mouvement entre la vis et la vanne, on parviendra à renfermer les écarts de la vitesse dans des limites suffisantes.

183. *Disposition indispensable dans l'emploi de ces régulateurs.* — La vanne du moteur hydraulique auquel on applique des régulateurs de ce genre étant conduite par le moteur lui-même, on conçoit que, pour les vannes en déversoir, qui doivent s'abaisser quand le mouvement se ralentit et pour les vannes avec charge sur le sommet, qui doivent se lever quand la résistance augmente, la course de ces organes étant forcément limitée, il importe de faire cesser l'action du régulateur avant qu'il ait atteint ces limites, sans quoi il en résulterait quelque rupture.

Il faudra donc disposer un appareil de débrayage qui interrompe l'action de la vis sans fin sur la vanne, dès que celle-ci est sur le point d'atteindre la limite de sa course.

184. *Modification de l'appareil précédemment décrit.* — Pour rendre l'appareil encore plus sensible à de faibles variations de vitesse, M. Delongchamp, ingénieur civil, a eu l'idée de transmettre le mouvement aux roues coniques par une courroie qui passe d'une poulie toujours folle sur deux autres, placées l'une à droite l'autre à gauche de celle-ci, et qui sont calées sur l'arbre des roues d'angle;

l'action du pendule se réduit alors à faire passer la courroie d'une poulie à l'autre, ce qui n'exige qu'un faible effort et évite le choc des griffes du manchon, dans l'autre dispositif.

Ainsi modifié, un régulateur d'un seul modèle suffit pour un grand nombre de cas différents.

185. *Autres régulateurs.* — Il existe d'autres appareils régulateurs, construits dans le même but que le précédent, dont nous n'avons parlé que pour montrer un exemple de l'usage que l'on peut faire de la force centrifuge. Nous citerons seulement en passant le régulateur Molinié, celui de M. Larivière, celui de Siemens, basé sur l'emploi du pendule conique d'Huyghens, etc. L'on peut obtenir avec ces appareils de bons résultats, mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler.

186. *Du mouvement varié autour d'un axe.* — On a vu par ce qui précède que, dans le mouvement de rotation autour d'un axe, le travail de toutes les forces extérieures qui sollicitent le corps est égal au travail de leur résultante. On peut donc supposer toutes ces forces remplacées par cette résultante.

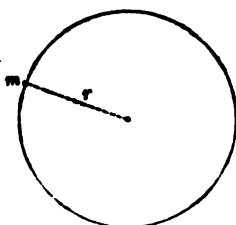


Fig. 71.

Si le mouvement est uniforme, il est évident que le travail des forces qui tendent à accélérer le mouvement sera égal à celui des forces qui tendent à le retarder, ou que le travail de la résultante sera nul.

Mais, si le travail de cette résultante n'est pas nul, il produit nécessairement dans la vitesse du corps une certaine variation, et alors l'inertie de chacune des masses élémentaires qui le composent développe, en sens contraire, des efforts proportionnels aux degrés de vitesse qui leur sont communiqués ou enlevés.

Nommons V_1 la vitesse angulaire ou le chemin circulaire qui serait décrit par un point situé à l'unité de distance de

l'axe, pendant l'unité de temps si, à l'instant que l'on considère, le mouvement devenait uniforme, et v_1 la variation élémentaire qu'éprouve cette vitesse dans l'élément de temps t; une masse élémentaire m quelconque du corps, située à la distance r sera animée de la vitesse V_1r, et la variation élémentaire de cette vitesse sera v_1r. Par conséquent, l'inertie par sa réaction développera, en sens contraire du travail de la résultante des forces extérieures, un effort $m.\frac{v_1r}{t}$ dirigé tangentiellement à la circonférence décrite par la masse m.

Or, si à chacune de ces masses élémentaires m on appliquait, en sens contraire de la variation du mouvement, une force égale à $m\frac{v_1r}{t}$, et dirigée dans le même sens que la réaction de l'inertie, cette force serait capable de détruire la variation de vitesse v_1r, et par conséquent l'effet de la résultante générale des forces extérieures sur cette masse m; donc l'ensemble de toutes ces forces détruirait l'effet de la résultante générale des forces extérieures, et par conséquent elles lui feraient équilibre. Or ces forces que nous venons de supposer appliquées à chacune des molécules du corps sont précisément égales aux réactions développées par l'inertie et dirigées dans le même sens. Il y a donc aussi, à chaque instant de la variation du mouvement, équilibre entre ces réactions et la résultante des forces extérieures, ou, ce qui revient au même, le travail développé par toutes ces réactions doit être égal au travail développé par cette résultante.

L'arc élémentaire décrit par la masse m étant a_1r, en appelant a_1 l'arc élémentaire à l'unité de distance, le travail développé par la force d'inertie pendant la variation de la vitesse sera pour la masse m :

$$m.\frac{v_1r}{t}.a_1r.$$

Or $\frac{a_1r}{t}=V_1r$ ou la vitesse possédée par la masse m à l'instant

que l'on considère; donc le travail élémentaire de la force d'inertie de la masse m a pour expression

$$mv_1r \times V_1r = m \cdot r^2V_1v_1.$$

Le produit de la masse m par le carré de sa distance r à l'axe de rotation qui entre dans cette expression se nomme le *moment d'inertie* de cette masse.

Pour une autre masse élémentaire m' située à la distance r', on aurait de même pour le travail de l'inertie $m'r'^2V_1v_1$, et pour un nombre quelconque de masses semblables, la somme des quantités de travail élémentaires développées par leur inertie sera

$$(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.})V_1v_1.$$

187. *Observation importante sur les moments d'inertie.* — La géométrie apprend à calculer la somme des moments d'inertie des éléments des corps de diverses formes, ainsi que nous l'indiquerons plus loin; mais il est utile dès à présent de faire connaître un théorème important relatif au moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, quand on connaît son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité de ce corps.

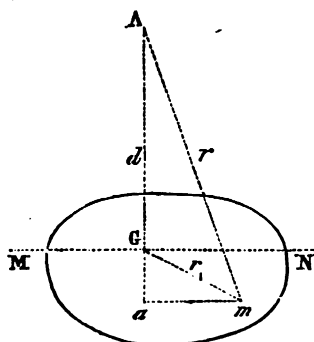


Fig. 72.

Considérons une masse élémentaire m d'un corps dont le centre de gravité soit G, et qui tourne autour d'un axe A. Le moment d'inertie de cet élément par rapport à l'axe A sera

$$m \cdot \overline{Am}^2 = mr^2.$$

Mais si l'on nomme $AG = d$ la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, et $Gm = r_1$ la distance de la molécule au

centre de gravité, on a d'abord par le triangle Aam formé en abaissant ma sur AG prolongé

$$\overline{Am}^2=\overline{Aa}^2+\overline{ma}^2,$$

ou attendu que

$$\overline{Aa}^2=AG^2+2AG\times aG+\overline{Ga}^2;$$

$$\overline{Am}^2=\overline{AG}^2+\overline{Gm}^2+2AG\times aG,$$

ou

$$r^2=d^2+r_1^2+2d.aG.$$

Le moment d'inertie de la masse m est donc

$$mr^2=md^2+mr_1^2+2.md.aG,$$

formule dans laquelle il faut observer que $m.aG$ est le moment de la masse m par rapport à un plan perpendiculaire à la ligne AG et passant par le centre de gravité. De même pour d'autres masses m', m'', etc., situées à des distances r', r'', r''', de l'axe A, et à des distances r_1', r_1'', r_1''', du centre de gravité, on aurait

$$m'r'^2=m'd^2+m'r_1'^2+2m'd.a'G,$$

$$m''r''^2=m''d^2+m''r_1''^2+2m''d.a''G.$$

Et par suite, en appelant I le moment total d'inertie par rapport à l'axe A, et $I_1=mr_1^2+m'r_1'^2+m''r_1''^2+\text{etc.}$, le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité G et M la masse totale du corps$=m+m'+m''+$etc., on a

$$I=M.d^2+I_1+2d[m.aG+m'a'G+m''a''G+\text{etc.}].$$

Or le terme entre parenthèses est la somme des moments des masses élémentaires qui composent le corps par rapport à un plan qui passe par le centre de gravité; elle est donc nulle, et la relation ci-dessus se réduit à

$$I=M.d^2+I_1;$$

ce qui exprime que *le moment d'inertie d'un corps par rap-*

port à un axe quelconque est égal au moment d'inertie du même corps par rapport à un axe parallèle au premier, et passant par le centre de gravité du corps, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

188. *Principe des forces vives dans le mouvement de rotation autour d'un axe.* — Il suit de ce qui a été dit au n° 188 qu'en appelant I le moment d'inertie total du corps que l'on considère, le travail développé par l'inertie pendant la variation élémentaire v_1 de la vitesse angulaire sera $I_1V_1v_1$, et l'on a vu que cette quantité doit être égale au travail développé dans le même temps par la résultante des forces extérieures; cela paraîtra d'ailleurs évident en observant que, si le travail des forces d'inertie était inférieur à celui de la résultante, en retranchant le premier du second, l'excès du travail de la résultante produirait une accélération ou une diminution de vitesse autre que celle qui a réellement lieu.

On a donc à un instant quelconque

$$I.V_1v_1 = R.a_1r_1$$

en appelant R la résultante de toutes les forces extérieures et r_1 son bras de levier.

Au bout d'un temps quelconque, le travail de cette résultante R, variable ou constante, s'obtiendra, soit directement, soit par la méthode de Simpson, et pourra être représentée par T.

Quant au travail total des forces d'inertie, le facteur I ne dépendant que des dimensions géométriques et de la matière dont le corps est composé, la somme de toutes les quantités de travail semblables, depuis le moment ou la position pour laquelle la vitesse angulaire était V_1 jusqu'à celle où elle est devenue V_1', sera, d'après ce que l'on a vu précédemment, représentée par

$$\frac{1}{2}I(V_1'^2 - V_1^2)$$

si le mouvement s'est accéléré, R étant une force motrice, ou par

$$\frac{1}{2}I(V_1^2-V_1'^2)$$

si le mouvement s'est retardé, R étant alors une résistance.

Par conséquent, au bout d'un temps quelconque, où la vitesse angulaire aura passé de la valeur V_1 à la valeur V_1', on aura entre les quantités de travail développées par les forces extérieures ou leur résultante et par les forces d'inertie, la relation

$$T=\frac{1}{2}I(V_1'^2-V_1^2).$$

On remarquera que, I étant la somme des produits élémentaires mr^2, $m'r'^2$, etc., on a

$$IV_1^2=mr^2V_1^2+m'r'^2V_1^2+\text{etc.},$$

expression dans laquelle $mr^2V_1^2$, $mr'^2V_1^2$, sont évidemment ce qu'on a appelé précédemment les forces vives des masses m, m', etc.; donc IV_1^2, $IV_1'^2$, sont les sommes des forces vives, ou la force vive totale du corps, et la relation ci-dessus nous montre que, *dans le mouvement de rotation comme dans le mouvement de translation, le travail développé par les forces extérieures au bout d'un temps quelconque est égal à la moitié de la force vive acquise ou perdue par le corps pendant le même temps.*

On voit donc que le principe des forces vives, démontré précédemment pour les mouvements parallèles de translation, est encore vrai pour les mouvements de rotation autour d'un axe.

Or, comme un mouvement, une vitesse, un travail élémentaire quelconque, peut toujours être décomposé en deux mouvements, vitesses ou travaux élémentaires, l'un de translation, dans le sens d'un certain axe, l'autre de rotation, perpendiculaire à ce même axe, et que dans cette décomposition le carré de la vitesse résultante est égal à la somme

des carrés des vitesses composantes, que la somme des forces vives composantes est égale à la force vive résultante et que le travail résultant est égal à la somme des travaux composants, il s'ensuit évidemment que *dans un mouvement quelconque le travail développé au bout d'un certain temps par les forces extérieures est égal à la moitié de la variation de la force vive correspondant au même intervalle.*

Tel est sous sa forme la plus générale l'énoncé du principe des forces vives, qui sert de base à la théorie générale des machines et des mouvements des corps.

Avant d'appliquer ce principe au mouvement des machines, nous en ferons usage pour l'étude du mouvement des pendules, et en particulier des pendules balistiques.

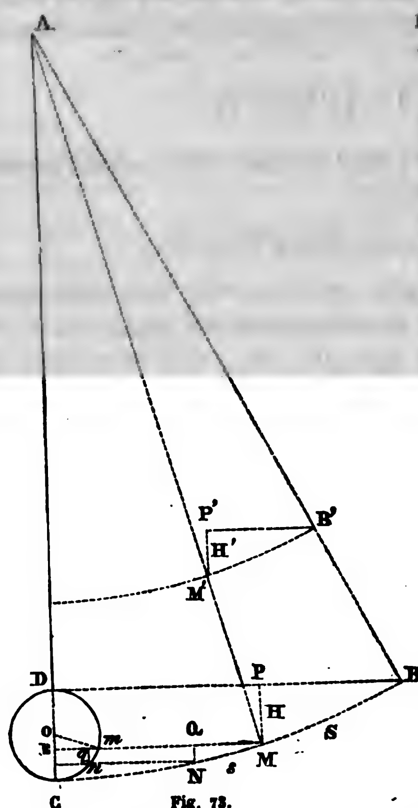


Fig. 73.

189. ***Théorie du pendule.***— Pour première application des principes précédents occupons-nous de la théorie du pendule, et d'abord supposons qu'il s'agisse du mouvement d'une masse élémentaire suspendue à une tige infiniment déliée, et cherchons les diverses circonstances du mouvement de cet appareil, qu'on nomme un pendule simple, et qui se trouverait ainsi, à fort peu près, dans les mêmes con-

ditions qu'une balle de plomb suspendue à un fil de soie très-fin, supposé rigide.

Supposons que le pendule, parti du point B, soit parvenu en M et soit descendu par conséquent d'une hauteur MP=H, le travail développé par la gravité sera $mg.H$, et si l'on appelle V la vitesse de la masse m, dirigée dans le sens de la tangente au cercle décrit, sa force vive sera mV^2, et d'après le principe des forces vives on aura

$$mV^2=2mgH \quad \text{ou} \quad V^2=2gH.$$

La vitesse V de ce mouvement varié a d'ailleurs pour expression le rapport $\frac{s}{t}$ de l'arc élémentaire parcouru dans l'élément de temps t; la relation ci-dessus revient donc à

$$\frac{s^2}{t^2}=2gH;$$

d'où

$$t^2=\frac{s^2}{2gH},$$

où

$$t=s\sqrt{\frac{1}{2gH}}.$$

Si l'on compare ce pendule, dont la longueur $AB=r$, à un autre dont la longueur serait $AB'=r'$, qui décrirait un angle égal et qui serait placé dans un lieu où la vitesse communiquée aux graves dans la première seconde de leur chute serait g', on aurait de même

$$t'^2=\frac{s'^2}{2g'H'}.$$

On aurait donc pour ces deux pendules la proportion

$$t^2:t'^2::\frac{s^2}{gH}:\frac{s'^2}{g'H'}.$$

Mais la condition que les angles décrits par les deux

s soient égaux nous donne pour un même déplacement angulaire élémentaire

$$s:s'::r:r', \quad \text{ou} \quad s^2:s'^2::r^2:r'^2,$$

et de plus on a $\quad H:H'::r:r',$

d'où $\quad \frac{s^2}{H}:\frac{s'^2}{H'}::r:r'.$

Par conséquent $\quad t^2:t'^2::\frac{r}{g}:\frac{r'}{g'};$

d'où $\quad t=t'\sqrt{\frac{g'}{g}}.\sqrt{\frac{r}{r'}}.$

On remarquera que, les rapports $\frac{g'}{g}$ et $\frac{r}{r'}$ étant donnés et indépendants des angles décrits, il résulte de là que les temps élémentaires, employés à parcourir les arcs élémentaires s et s', sont dans un rapport constant, et que par conséquent il en est de même de la somme de ces temps élémentaires ou des temps totaux T et T' employés à parcourir une oscillation entière. On a donc aussi

$$T=T'\sqrt{\frac{g'}{g}}.\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Telle est la relation entre les durées des oscillations des pendules simples en différents lieux et pour différentes longueurs.

Si l'on compare des pendules de même longueur, on a $r=r'$, et alors

$$\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g}},$$

ce qui montre que les durées des oscillations des pendules simples de même longueur, en différents lieux de la terre, sont entre elles en raison inverse des racines carrées des valeurs de g, et peuvent servir à déterminer celles-ci.

Quand on opère dans le même lieu, on a $g = g'$, et alors

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{r}{r'}};$$

d'où il suit qu'alors les durées des oscillations sont entre elles comme les racines carrées des longueurs des pendules, ainsi que Galilée l'avait découvert par l'observation directe avant que la théorie eût été faite.

190. *Durée des oscillations d'un pendule dont l'écart est très-petit.* — Si dans la relation

$$t = \frac{s}{\sqrt{2gH}}$$

nous cherchons à introduire la valeur de l'arc élémentaire s, décrit dans l'instant t, en fonction des données de la figure, nous avons par les triangles semblables MQN et MAE, fig. 73,

$$MN:QN::AM:ME, \text{ ou } s:QN::r:ME;$$

d'où $$MN = s = r.\frac{QN}{ME}.$$

Or ME est moyenne proportionnelle entre CE et $2r$ — CE, $2r$ étant le diamètre du cercle décrit par le pendule; on a donc

$$ME = \sqrt{(2r - CE)CE} = \sqrt{2r \times CE - \overline{CE}^2}.$$

Mais quand l'amplitude des oscillations est très-petite, on peut négliger le carré de CE ou de la flèche de l'arc décrit, par rapport au produit $2r \times CE$, ce qui réduit la valeur ci-dessus à

$$ME = \sqrt{2r \times CE}.$$

On a donc alors $$t = \frac{s}{\sqrt{2gH}} = \frac{QN.r}{\sqrt{2gH} \times \sqrt{2r \times CE}},$$

d'où $$t^2 = \frac{r}{4gH}.\frac{\overline{QN}^2}{CE} = \frac{s^2}{2gH}.$$

Mais si l'on décrit sur CD comme diamètre un cercle et si l'on mène les parallèles Mm et Nn à la corde BD, on aura

$$\overline{mE}^2 = CE \times DE = CE \times H,$$

ce qui donne $$t^2 = \frac{r}{4g}\left(\frac{QN}{mE}\right)^2 = \frac{s^2}{2gH}.$$

Or les triangles semblables mOE et mqn donnent

$$qn \text{ ou } QN : mE :: mn : mO;$$

d'où $$\frac{QN}{mE} = \frac{mn}{mO},$$

et par suite $$t^2 = \frac{s^2}{2gH} = \frac{r}{4g}\left(\frac{mn}{mO}\right)^2,$$

d'où $$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\frac{mn}{mO}.$$

On voit donc que le temps infiniment petit employé par le pendule à parcourir un arc élémentaire MN est égal au produit du facteur constant

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\frac{1}{mO},$$

par l'élément mn de la circonférence du cercle décrit sur CD comme diamètre. Donc la somme de tous les éléments de temps successivement employés à décrire l'arc BC sera égale au même facteur multiplié par la demi-circonférence, dont DC est le diamètre ou mO le rayon, laquelle est égale à $\pi mO = 3,14.mO$; on aura donc pour la durée totale de la demi-oscillation

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\frac{\pi.mO}{mO} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

et pour l'oscillation entière

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Telle est la formule qui donne la durée des oscillations du pendule simple. On en tire pour la valeur de la vitesse communiquée aux graves dans la première seconde de leur chute par la pesanteur

$$g=\frac{\pi^2 r}{T^2};$$

ce qui montre comment la connaissance de la durée des petites oscillations d'un pendule simple de longueur connue peut servir à déterminer la valeur du nombre g.

Mais le pendule simple n'est qu'une abstraction, et ce n'est que comme moyen d'approximation que l'on peut employer des balles de plomb ou d'autres corps lourds, suspendus à un fil, pour mesurer le temps par la durée de leur oscillation, et considérer cet appareil comme un pendule simple, dont toute la masse est réunie à son centre de figure.

Dans les cas ordinaires, pour les pendules des horloges, et à plus forte raison pour ceux que l'on emploie à la détermination des vitesses imprimées par la poudre aux projectiles, et qu'on nomme pour cette raison *pendules balistiques*, il faut tenir compte de la répartition de la masse.

191. *Du pendule composé.* — Considérons donc un corps solide qui tourne ou oscille autour d'un axe fixe, et cherchons les diverses circonstances de son mouvement.

En appelant d'abord, comme par le passé, I le moment d'inertie de ce corps par rapport à l'axe de rotation et V_1 la vitesse angulaire à un instant où son centre de gravité est descendu de la hauteur H, nous aurons encore par le principe des forces vives

$$IV_1^2=2Mg.H;$$

et si l'on nomme d la distance du centre de gravité du pendule à l'axe, et H_1 la hauteur dont un point situé à l'unité de distance est descendu, la proportion

$$H_1:1^m::H:d,$$

d'où $H = H_1 d$, et la relation ci-dessus donne

$$V_1^2 = \frac{Md}{I} 2g.H_1.$$

Cette relation est de même forme que celle qui se rapportait au pendule simple, et n'en diffère que par le facteur $\frac{Md}{I}$, qui ne dépend que des dimensions et de la nature du corps.

On a encore ici pour la vitesse angulaire $V_1 = \frac{s_1}{t}$, ce qui conduit à la relation

$$t^2 = \frac{s_1^2}{\frac{Md}{I} 2gH_1}.$$

En raisonnant ici exactement comme on l'a fait pour le pendule simple et en supposant les amplitudes d'oscillations très-petites, ce qui permet de négliger l'influence de la résistance de l'air, on ferait voir encore que la fraction

$$\frac{s_1^2}{2gH_1} = \frac{r_1}{4g}\left(\frac{mn}{mo}\right)^2 = \frac{1}{4g} \cdot \left(\frac{mn}{mo}\right)^2,$$

à cause de $r_1 = 1^m,00$; d'où il suit que la durée d'une fraction élémentaire d'une oscillation a pour expression

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{Mdg}} \times \frac{mn}{mo},$$

et que la durée totale de l'oscillation est

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{M.dg}}.$$

192. *Longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé.* — Si l'on compare la formule du pendule simple à celle du pendule com-

posé, l'on voit que, pour que les durées des oscillations soient égales, il faut que l'on ait

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}}=\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}},$$

ce qui donne pour la longueur cherchée du pendule simple

$$r=\frac{I}{Md}.$$

193. *Détermination du moment d'inertie d'un pendule composé.* — Lorsque dans la formule

$$T=\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}}$$

on connaîtra la masse totale du pendule, et la distance d de son centre de gravité à l'axe des couteaux ou de la suspension, l'observation de la durée T des oscillations donnera pour le moment d'inertie par rapport à l'axe

$$I=\frac{T^2}{\pi^2}Mdg,$$

ce qui dispensera du calcul, assez laborieux dans beaucoup de cas, de ce moment d'inertie.

Cette formule trouvera en particulier son application pour la détermination des moments d'inertie des volants, des pendules balistiques, etc. Il suffira en effet de les faire osciller autour d'un axe quelconque, placé à une distance connue de leur centre de gravité, en les écartant fort peu de la verticale, et d'observer la durée de leurs oscillations en comptant leur nombre.

On se rappelle de plus (n° **187**) qu'en nommant I_1 le moment d'inertie par rapport à un axe qui passerait par le centre de gravité et qui serait parallèle à l'axe de suspension, on a la relation

$$I=Md^2+I_1,$$

ce qui donnera au besoin le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Il en résulte aussi que la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps que le pendule composé, et que nous désignerons par k, a pour expression

$$k=\frac{I}{Md}=d+\frac{I_1}{Md},$$

et qu'elle est toujours plus grande que celle du centre de gravité à l'axe.

En portant sur la ligne AG, qui joint l'axe au centre de gravité, une longueur

$$AO=d+\frac{I_1}{Md}$$

tous les points qui se trouveront sur la parallèle à l'axe, menée par le point O, pourront être regardés comme les centres d'autant de pendules simples dont les oscillations se feraient dans le même temps que celles du pendule composé. Ce point O ainsi déterminé se nomme le *centre d'oscillation du pendule.*

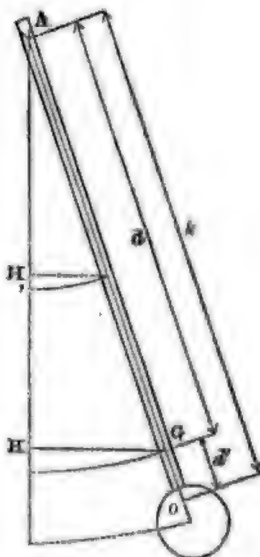


Fig. 74.

Il est bon de remarquer que le point A serait réciproquement le centre d'oscillation du même pendule, si le centre O devenait celui de suspension. En effet, si l'on nomme d' la distance OG du centre de gravité au point O, on aurait pour la distance k' du nouveau centre d'oscillation à l'axe O

$$k'=d'+\frac{I_1}{Md};$$

mais

$$OG=d'=k-d=\frac{I_1}{Md},$$

d'où l'on tire

$$d=\frac{I_1}{Md'},$$

et par suite

$$k'=k-d+d=k.$$

194. ***Détermination du centre de gravité des pendules composés.*** — Cette opération s'exécute par le calcul ou par les moyens indiqués au n° **142**, ou par la combinaison des deux méthodes. Quelquefois, pour les pendules balistiques dont le poids s'élève à plusieurs milliers de kilogrammes, on emploie le moyen suivant. On fixe en un point quelconque de leur suspension, au canon ou au récepteur, une corde qui passe sur une poulie de renvoi, et à laquelle on suspend un poids qui soutient le pendule dans une inclinaison déterminée. La poulie doit être grande, son axe petit et bien graissé, de manière qu'on puisse négliger le frottement ou être certain de ne pas commettre d'erreur notable en le calculant. Le frottement des couteaux, qui ne font que rouler sur leurs coussinets, peut être négligé; on connaît d'ailleurs et l'on a pu déterminer d'avance la position et même les traces du plan vertical qui contient le centre de gravité, quand l'appareil est libre : il est donc facile de mesurer l'inclinaison que prend ce plan sous l'action d'un contre-poids donné. Cela fait, appelons

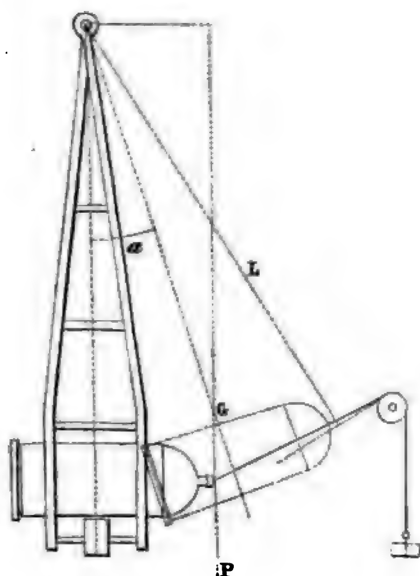


Fig. 75.

p le poids du pendule;

d la distance cherchée de son centre de gravité à l'axe des couteaux;

a l'inclinaison du plan qui passe par le centre de gravité et par l'axe des couteaux, avec la verticale;

L la perpendiculaire abaissée de cet axe sur la direction de la corde;

T la tension de cette corde, on a la relation

$$TL = p.d \sin a;$$

d'où

$$d = \frac{TL}{p.\sin a}.$$

195. *Centre de percussion.* — Lorsqu'un corps (fig. 76) reçoit un mouvement de rotation autour de l'axe A, que nous supposons ici perpendiculaire au plan du tableau, chaque masse élémentaire de ce corps développe des forces d'inertie partielles perpendiculaires aux distances respectives de chacune d'elles à l'axe, et dont l'intensité est mesurée par $mr\frac{v_1}{t}$, selon la notation adoptée au n° 187. Le moment de chacune de ces forces par rapport à l'axe de rotation est $mr^2.\frac{v_1}{t}$, et la somme de tous les moments semblables a pour valeur $I.\frac{v_1}{t}$.

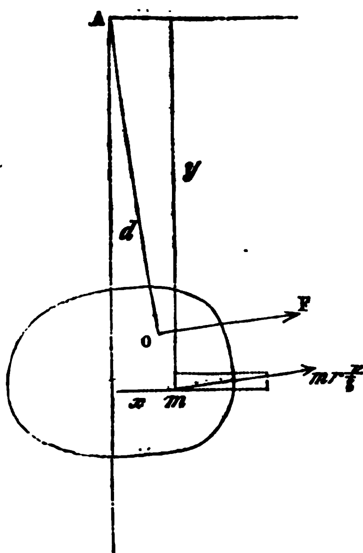


Fig. 76.

Si l'on décompose chaque force partielle $m.r\frac{v_1}{t}$ en deux autres, l'une horizontale et l'autre verticale, et qu'on nomme x et y l'abscisse et l'ordonnée de m par rapport à un plan vertical et à un plan horizontal passant par l'axe A, la première composante sera évidemment

$$mr.\frac{v_1}{t}\frac{y}{r} = \frac{mv_1}{t}.y,$$

et la seconde sera $mr.\frac{v_1}{t}.\frac{x}{r}=\frac{mv_1}{t}x.$

Si l'on appelle x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité du corps, on aura évidemment, en faisant séparément la somme de toutes les composantes horizontales et verticales, d'après la théorie des forces parallèles :

$$\frac{v_1}{t}[my+m'y'+....]=\frac{v_1}{t}.My_1$$

et $$\frac{v_1}{t}[mx+m'x'+\text{etc.}]=\frac{v_1}{t}Mx_1.$$

D'où il suit encore que la résultante de ces deux groupes de forces rectangulaires est

$$\frac{v_1}{t}M\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{v_1}{t}M.d,$$

et qu'elle fait avec l'axe horizontal et l'axe vertical des coordonnées des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{y_1}{d}$ et $\frac{x_1}{d}$, en sorte qu'elle est perpendiculaire à la distance d du centre de gravité à l'axe.

Cela posé, si l'on désigne par O le point d'application de cette résultante $F=\frac{v_1}{t}M.d$, son moment sera égal à la somme de ceux de toutes les forces d'inertie du corps, et l'on aura

$$F\times AO=\frac{v_1}{t}.M.d\times AO=I\frac{v_1}{t};$$

d'où $$AO=\frac{I}{M.d}.$$

Le point ainsi déterminé se nomme le *centre de percussion*. Il est tel, qu'une force capable de produire, dans l'élément de temps, la variation de vitesse angulaire v_1 et qui serait appliquée à ce point, serait précisément égale à la résultante de toutes les forces d'inertie des différents éléments du

corps. Donc la pression, ou, comme on dit ordinairement, la percussion qui résulterait sur l'axe, de cette force et de cette résultante, alors égales et directement opposées, serait nulle.

Donc aussi réciproquement, pour que cette pression soit nulle, il faut que la force extérieure qui produit la variation du mouvement passe par le centre de percussion pour qu'il n'y ait pas de choc sur les couteaux ou sur l'axe de rotation.

On remarquera que la distance du centre de percussion à l'axe est la même que celle du centre d'oscillation, et que ces deux points se confondent. C'est pourquoi l'on doit, dans les pendules balistiques, faire en sorte que l'action de la poudre ou le choc du projectile ait lieu précisément à hauteur du centre d'oscillation.

196. *Théorie du pendule balistique.* — On emploie généralement aujourd'hui dans le service des poudres, pour la réception et l'épreuve des poudres, un appareil connu sous le nom de *pendule balistique* (pl. III, fig. 12), dont l'invention appartient à l'Anglais Robins, célèbre professeur d'artillerie, mais qui a reçu en France, dans ces derniers temps, de notables perfectionnements.

Les pendules balistiques qui sont en usage dans les poudreries françaises, soit pour les épreuves au fusil, soit pour celles au canon, se composent d'un récepteur en fonte fixé à une suspension en fer. Ce récepteur contient une matière molle ou compressible, susceptible de recevoir et d'amortir le choc et la vitesse d'un projectile, sans que la rupture du récepteur puisse avoir lieu.

Le tir a lieu à hauteur de l'axe du récepteur, qui est horizontal. Nous appellerons ici, comme dans l'*Aide-Mémoire des officiers d'artillerie*,

R le rayon de l'arc décrit par l'aiguille qui fait marcher un curseur le long d'un limbe gradué indiquant les angles de recul;

i la distance du point choqué ou point d'impact au plan horizontal des couteaux;

k la distance du centre d'oscillation à l'horizontale des couteaux;

p le poids total du pendule chargé, c'est-à-dire y compris les tampons ou barils pleins de sable, pour ceux à canons, ou le bloc de plomb et la planchette pour ceux à fusils;

d la distance du centre de gravité du pendule chargé à la ligne des couteaux;

b le poids du projectile;

c la corde de l'arc de recul;

a l'angle décrit par le pendule;

$g = 9^m,8088$;

V la vitesse du projectile à l'instant où il atteint le récepteur;

V_1 la vitesse angulaire communiquée au pendule après le choc.

Il faut d'abord remarquer que pendant le choc il se développe, aux points de contact des projectiles et du récepteur, des efforts d'action et de réaction égaux et directement opposés.

L'action exercée sur le récepteur accélère son mouvement, et, d'après ce qui précède, le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation doit être égal à celui de toutes les forces d'inertie des molécules matérielles qui composent le pendule.

En continuant à nommer v_1 le petit accroissement de vitesse angulaire communiqué au pendule pendant l'élément de temps t, la résistance d'une masse élémentaire m située à la distance r de l'axe sera, comme on l'a déjà dit, exprimée par $mr.\frac{v_1}{t}$; son moment par rapport à l'axe sera $mr^2.\frac{v_1}{t}$; la somme de tous les moments semblables sera $\text{I}.\frac{v_1}{t}$, et elle devra être égale au moment de l'effort exercé au même instant par le projectile.

Mais d'un autre côté ce projectile, qui agit perpendiculairement à sa distance i du plan horizontal des couteaux, perd dans l'élément de temps un petit degré de vitesse v, et son inertie, qui est la même pour tous les points qui sont animés de vitesses à très-peu près égales et parallèles, donne lieu à un effort moteur exprimé par $\frac{b}{g}\cdot\frac{v}{t}$, dont le moment par rapport à l'axe des couteaux est $\frac{b}{g}i\cdot\frac{v}{t}$.

Ainsi, à un instant quelconque du choc, on doit avoir, entre les actions développées par le projectile et la réaction du pendule, la relation

$$\frac{b}{g}i\frac{v}{t}=\mathrm{I}\frac{v_1}{t},$$

ou

$$\frac{b}{g}i\cdot v=\mathrm{I}v_1.$$

En établissant des relations analogues pour tous les degrés élémentaires de vitesse perdus successivement par le projectile et gagnés par le pendule, on aura en les ajoutant:

$$\frac{b}{g}i\,[v+v'+v''+\text{etc.}]=\mathrm{I}\,[v_1+v'_1+v''_1+\text{etc.}].$$

Or la somme $v+v'+v''+$ etc., est évidemment égale à la vitesse totale perdue par le projectile depuis le moment où il a atteint le récepteur avec la vitesse V jusqu'à celui où, ayant perdu toute vitesse relative par rapport au récepteur, il a marché avec ce corps d'une vitesse commune égale à $\mathrm{V}_1 i$, en nommant V_1 la vitesse angulaire communiquée à ce corps; on a donc

$$v+v'+v''+\text{etc.}=\mathrm{V}-\mathrm{V}_1 i.$$

D'autre part, le récepteur partant du repos et acquérant par le choc la vitesse finale angulaire V_1, on a

$$v_1+v'_1+v''_1+\text{etc.}=\mathrm{V}_1.$$

La relation ci-dessus devient donc

$$\frac{b}{g}i[V-V_1 i]=IV_1=\frac{p}{g}dk.V_1,$$

attendu que $I=\frac{p}{g}dk$.

On tire de cette expression

$$V_1=\frac{biV}{bi^2+pdk},$$

et l'on a d'ailleurs vu que, pour qu'il n'y ait pas de choc, on doit avoir $i=k$.

Mais d'une autre part, quand le pendule recule, son centre de gravité s'élève, et bientôt la force vive qu'il possédait ainsi que celle du projectile qu'il a reçu, sont éteintes, et elles doivent être égales au double du travail développé par la pesanteur et par le frottement de roulement des couteaux, que l'on néglige.

L'angle décrit par le pendule étant a, il est clair que son centre de gravité s'est élevé de la quantité

$$d-d\cos a=d(1-\cos a)=2d\sin^2\frac{1}{2}a.$$

Le projectile est resté à la distance i de l'axe de rotation, et s'est élevé de la hauteur

$$i-i\cos a=2i\sin^2\frac{1}{2}a;$$

donc le travail total développé par la gravité sur le pendule et le boulet a pour expression

$$(pd+bi)2\sin^2\frac{1}{2}a.$$

La force vive possédée par ces deux corps à la fin du choc ou de leur réaction réciproque est

$$\frac{V_1^2}{g}[pdk+bi^2].$$

on a donc

$$\frac{V_1^2}{g}[pdk+bi^2]=4[pd+bi]\sin^2\frac{1}{2}a;$$

d'où
$$V_1=\sqrt{\frac{(pd+bi)g}{pdk+bi^2}}.2\sin\frac{1}{2}a.$$

En égalant cette valeur de V_1 à la précédente, on a

$$\frac{biV}{bi^2+pdk}=\sqrt{\frac{(pd+bi).g}{pdk+bi^2}}2\sin\frac{1}{2}a,$$

d'où l'on tire

$$V=\frac{\sqrt{(pdk+bi^2)(pd+bi)g}}{bi}2\sin\frac{1}{2}a.$$

Telle est la formule qui sert à calculer les vitesses initiales des projectiles au moyen des données qui y entrent et de l'angle de recul.

On remarquera qu'en nommant C la corde des arcs de recul dont le rayon est R, on a

$$2\sin\frac{1}{2}a=\frac{C}{R},$$

ce qui donne

$$V=\frac{\sqrt{(pdk+bi^2)(pd+bi)g}}{bi}.\frac{C}{R}.$$

C'est sous cette forme qu'elle est rapportée dans l'*Aide-Mémoire d'artillerie.*

On a vu que la condition de ne pas avoir de choc sur les couteaux conduisait à celle de $i=k$. Si elle était complétement satisfaite, la formule ci-dessus se réduirait à

$$V=\frac{pd+ib}{bR}\sqrt{\frac{g}{i}}C;$$

ce qui montre qu'alors les vitesses mesurées seraient proportionnelles aux cordes des arcs de recul.

Mais cette condition, dont on s'est beaucoup approché

dans la construction des nouveaux pendules à canons de Metz, du Bouchet et de Vincennes, n'est pas à beaucoup près satisfaite dans les pendules des fusils, et c'est ce qui y occasionne de si sensibles vibrations.

Les officiers d'artillerie trouveront plus de détails sur ces appareils daus l'instruction sur les épreuves semestrielles des poudres avec les pendules balistiques.

APPLICATION GÉNÉRALE DU PRINCIPE DES FORCES VIVES AUX MACHINES.

197. *Application du principe des forces vives aux machines.* — Pour appliquer ce principe au mouvement des machines, il faut examiner séparément les circonstances et les conditions de l'action des différentes forces auxquelles elles sont soumises. Ces forces peuvent se classer ainsi qu'il suit :

1° Les puissances qui produisent, entretiennent ou accélèrent le mouvement, et dont le travail, que nous désignerons par F . E, est toujours développé dans le sens du mouvement et par conséquent positif ; on désigne ici par F l'effort moyen de la résultante.

2° Les résistances utiles qu'il faut vaincre ou détruire pour produire l'effet proposé, l'ouvrage que la machine doit exécuter, et qui détruisent, retardent ou modèrent le mouvement. Le travail de ces résistances, que nous désignerons par Q . E', est toujours développé en sens contraire de celui des puissances, et doit en être retranché.

3° Les résistances nuisibles ou passives inhérentes au mouvement, telles que les frottements, la résistance au roulement, celles de l'air, de l'eau, etc., qui absorbent inutilement une portion du travail moteur, retardent, modèrent ou détruisent le mouvement, et dont le travail, que nous représenterons par R . E'', se retranche toujours du travail des puissances.

4° L'action de la gravité, que l'on devra considérer séparément toutes les fois qu'elle agira, tantôt comme puissance, tantôt comme résistance, et dont le travail, représenté par P. H, sera positif ou additif par rapport à celui des puissances dans le premier cas, et négatif ou soustractif dans le second.

Mais, quand la gravité agira toujours comme puissance, comme dans les roues hydrauliques, les horloges à poids, etc., elle devra être comprise parmi les puissances; et à l'inverse, quand elle agira toujours comme résistance utile, comme dans les machines d'extraction ou dans l'élévation des fardeaux, etc., elle devra être réunie aux résistances utiles.

D'après cette classification des forces, le principe des forces vives sera représenté par l'équation

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}[V_1'^2-V_1^2]=\mathrm{FE}-\mathrm{QE}'-\mathrm{RE}''\pm\mathrm{PH},$$

en supposant qu'il n'y ait que des pièces de rotation, ou en général

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}[V'^2-V^2]=\mathrm{FE}-\mathrm{QE}'-\mathrm{RE}''\pm\mathrm{PH};$$

les expressions IV'^2, MV'^2, etc., représentant la somme de toutes les forces vives analogues des parties de la machine.

Cette relation se rapporte à un intervalle de temps fini, et l'on a vu que pour un élément de temps ou un déplacement infiniment petit on avait aussi

$$\mathrm{IV}_1v_1=\mathrm{F}e-\mathrm{Q}e'-\mathrm{R}e''\pm\mathrm{P}h.$$

Le but de l'établissement de toute machine étant de vaincre une résistance utile, de faire un certain ouvrage, il est évident que c'est le travail QE' ou Qe' de ces résistances utiles qui doit être rendu le plus grand possible ou un maximum; si nous tirons de la relation ci-dessus la valeur de QE' nous aurons

$$\mathrm{QE}'=\mathrm{FE}-\mathrm{RE}''\pm\mathrm{PH}+\frac{1}{2}\mathrm{IV}_1^2-\frac{1}{2}\mathrm{IV}_1'^2,$$

ou pour l'élément de temps

$$\mathrm{Q}e'=\mathrm{F}e-\mathrm{R}e''\pm\mathrm{P}h-\mathrm{IV}_1v_1.$$

198. *Conditions du maximum d'effet des machines.* — Examinons successivement les conditions auxquelles il convient

de satisfaire, autant que possible, pour que le travail utile soit un maximum.

199. *Travail des puissances.* — Remarquons d'abord que pour chaque espèce de moteur ou de puissance il y a un effort maximum correspondant à une vitesse nulle, pour laquelle le travail est nul, et une vitesse maximum correspondant à un effort nul et par conséquent encore à un travail nul. Ainsi, pour les moteurs animés, l'effort et la vitesse ont des limites absolues, pour lesquelles l'un est nul quand l'autre est à son maximum. Il en est de même pour les roues hydrauliques, pour lesquelles l'effort est à son maximum quand la vitesse est nulle, et à son minimum quand la vitesse est la plus grande que l'eau puisse communiquer dans la marche à vide. De même encore pour les machines à vapeur, pour les moulins à vent, etc.

Entre ces limites extrêmes il y a une certaine vitesse qui, pour chaque puissance motrice, selon sa nature et la combinaison des organes mécaniques, correspond à une quantité de travail maximum, développée par la puissance; et comme il arrive souvent que pour des vitesses plus grandes ou plus petites ce travail diminue rapidement, il en résulte qu'il importe beaucoup de conserver, aux points d'application de la puissance motrice, cette vitesse qui correspond à son maximum d'effet, et par conséquent au récepteur de cette puissance un mouvement uniforme.

200. *Travail des résistances utiles.* — Il y a lieu de faire les mêmes observations pour le travail des résistances utiles : car, selon la nature des outils et des produits, il y a une certaine vitesse à laquelle correspond la meilleure qualité des produits, le meilleur effet, ou la plus longue durée des outils : ainsi pour la mouture des blés, le laminage des fers, pour l'étirage et la filature des cotons, des laines, etc., il y a une vitesse convenable à la qualité et à la nature des produits à obtenir; dans les scieries, les tours à métaux, les pompes, etc., la conservation des outils ou l'économie du

travail exigent que la vitesse ne dépasse pas certaines limites, etc. Donc encore, pour les résistances utiles, comme pour les puissances motrices, il convient que le mouvement soit uniforme.

201. *Travail des résistances nuisibles ou passives.* — Quant aux résistances nuisibles ou passives, le travail qu'elles consomment étant toujours dépensé en pure perte, il est évident qu'il faut chercher à le rendre le plus petit possible. Il faudra donc diminuer le frottement, et par conséquent le poids des pièces qui glissent les unes sur les autres; rendre leurs surfaces polies, les entretenir toujours bien graissées, diminuer les chemins parcourus par les parties frottantes. Pour la résistance de l'air ou de l'eau il conviendra de limiter les vitesses, et de donner aux corps les formes les plus convenables pour atténuer ces résistances, etc.

202. *Pièces à mouvement alternatif.* — Le travail dû au poids des pièces qui montent et descendent alternativement et périodiquement de la même hauteur étant nul pour chaque période, on voit qu'il n'y aurait pas lieu de s'en occuper dans les machines dont le mouvement embrasse un grand nombre de périodes semblables, si ces alternatives, en augmentant ou diminuant périodiquement le travail moteur, ne produisaient dans le mouvement des variations correspondantes, qui altèrent l'uniformité du mouvement dont on a reconnu la nécessité.

Si donc on ne peut supprimer tout à fait les pièces qui montent ou descendent périodiquement, il conviendra d'en limiter le nombre et l'influence autant que possible, et la condition générale sera de n'employer que des pièces centrées par rapport à leur axe de rotation, ou dont le centre de gravité reste à la même hauteur.

A ce sujet nous pourrions montrer une courbe d'expérience dynamométrique, obtenue sur un ventilateur qui, par la nature de la résistance à vaincre, devait avoir un mouvement uniforme, et qui, par l'effet d'un défaut de centrage,

travailler d'une manière continue, ou tout au moins par intervalles égaux, ainsi que le font le babillard des moulins, le pied-de-biche des scieries, etc.

206. ***Inconvénients du mouvement varié et moyens de les diminuer.*** — Outre les inconvénients que nous avons signalés, relativement à l'irrégularité d'action de la puissance motrice et de la résistance utile, le mouvement varié a celui d'obliger à donner aux pièces qui y sont soumises des dimensions plus considérables que celles qu'exige le mouvement uniforme relatif au même travail, puisque les efforts auxquels ces pièces doivent résister sont, à certains instants, plus grands que l'effort constant qui correspondrait au mouvement uniforme. De là résultent un excédant de poids et un surcroît de frottement, outre les chocs ou les altérations de forme plus ou moins sensibles qui se produisent dans les changements de vitesse.

Tous ces inconvénients étant d'autant plus grands que les forces vives des pièces à mouvement alternatif sont plus considérables, il faudra donc, après avoir limité leurs dimensions à ce qui sera nécessaire, rendre leurs vitesses aussi petites que possible par rapport à celles des pièces douées d'un mouvement uniforme ou voisin de l'uniformité.

207. *Observations sur la mise en marche des machines, et les variations de la vitesse qui ont alors lieu.* — La relation

$$IV_1v_1 = Fe - Qe' - Re'' \pm Ph$$

nous donne pour la variation élémentaire de la vitesse

$$v_1 = \frac{Fe - Qe' - R'' \pm Ph}{IV_1}.$$

On voit que la vitesse croîtra quand le travail moteur élémentaire Fe sera plus grand que la somme des quantités de travail de toutes les résistances; mais que, pour un excès donné de travail, la variation, l'accroissement de la vitesse sera d'autant moindre que la vitesse V_1 possédée par le

corps sera plus grande, et que le moment d'inertie I des masses en mouvement sera plus considérable. De même, quand le travail moteur élémentaire sera inférieur au travail des résistances, la vitesse décroîtra, mais d'autant moins que la vitesse et le moment d'inertie seront plus grands.

Les mouvements rapides et ceux dans lesquels les moments d'inertie sont considérables sont donc les plus *stables*, ou ceux qui, par l'action de causes données, éprouvent le moins d'altération.

Quand une machine part du repos, sa vitesse, d'abord nulle, croît graduellement, ce qui provient de ce qu'alors le travail du moteur l'emporte à chaque instant sur celui de la résistance. Mais d'une part le travail moteur atteint sa valeur maximum à une certaine vitesse, passée laquelle il décroît, et de l'autre le travail des résistances croît souvent avec la vitesse, de sorte que bientôt l'on a l'égalité

$$Fe = Qe' + Re'' \mp Ph.$$

A cet instant, la variation, l'accroissement v_1 de la vitesse est nul, et cette vitesse a atteint son maximum. Si cette égalité du travail moteur et du travail résistant subsiste, le mouvement devient uniforme; mais cela ne peut arriver qu'autant que le terme $\mp Ph$ est nul, c'est-à-dire que le centre de gravité de toutes les pièces reste toujours à la même hauteur.

Cette condition du mouvement uniforme est en quelque sorte évidente d'elle-même, puisqu'elle revient à énoncer que le travail des puissances qui tendent à accélérer ou entretenir le mouvement doit être égal à celui des résistances qui tendent à le retarder ou à le détruire.

Le travail élémentaire étant, ainsi que nous l'avons fait remarquer déjà au nº **120**, ce qu'on nomme, en mécanique rationnelle, *le moment virtuel*, on voit que l'énoncé précédent revient encore à dire que, pour le mouvement uniforme, ou pour l'équilibre, qui n'en est qu'un cas particu-

lier, le moment virtuel des puissances doit être égal à celui des résistances, ou leur somme égale à zéro.

208. *Observation relative au mouvement perpétuel.* — La vitesse ne pouvant rester la même qu'autant que sa variation élémentaire $v_1 = o$, on doit alors avoir

$$Fe = Qe' + Re'' \mp Ph.$$

Or, en supposant même que le travail de la résistance utile Qe' fût nul, auquel cas la machine ne servirait à rien, celui des résistances nuisibles Re'' ne serait jamais nul, puisqu'il ne peut y avoir de machines sans poids et par conséquent sans frottements. Il faudra donc toujours un certain travail moteur Fe pour entretenir le mouvement; ce qui montre l'absurdité de toutes les tentatives sans cesse renouvelées pour obtenir ce qu'on nomme le *mouvement perpétuel*, c'est-à-dire un mouvement qui s'entretienne de lui-même sans le secours d'aucune force motrice extérieure.

209. *Mouvement périodique.* — Il arrive fort rarement que le travail moteur reste toujours égal à celui des résistances, à partir de l'instant où la vitesse a acquis sa valeur maximum. Le plus souvent, au contraire, le travail résistant commence alors à l'emporter sur le travail moteur, la variation de la vitesse devient négative, et le mouvement se ralentit. Mais, comme alors le travail des résistances utiles ou passives peut diminuer, tandis qu'en même temps celui de la puissance s'accroît, l'excès du premier sur le second diminue, le mouvement se retarde de moins en moins, et l'on a de nouveau

$$Fe = Qe' + Re'' \mp Ph.$$

La vitesse cessant alors de diminuer, elle atteint son minimum.

Si la diminution de la vitesse ne va pas jusqu'à éteindre le mouvement, il arrive ensuite une autre période d'accélé-

ration limitée à un second maximum de vitesse, et ainsi de suite.

Les machines marchent donc la plupart du temps d'un mouvement périodique, tantôt accéléré, tantôt retardé, dans lequel la vitesse atteint successivement et alternativement des maxima et des minima; mais, ces périodes s'accomplissant ordinairement dans des temps égaux, on substitue, comme nous l'avons dit, à cette vitesse variable, assez difficile à déterminer, la considération d'une vitesse moyenne.

210. *Manière de limiter les écarts de la vitesse. Théorie des volants.* — Après avoir employé tous les moyens ordinaires pour régulariser le jeu des machines, il en reste encore un autre pour renfermer les variations de vitesse, entre les limites convenables pour chaque cas, sous l'action d'excès donnés et alternatifs du travail moteur ou résistant.

Si l'on considère en effet l'équation au moyen de laquelle on exprime le principe des forces vives

$$I[V_1'^2 - V_1^2] = 2[FE - QE' - RE'' \pm PH] = 2T,$$

on voit que pour une période déterminée dans laquelle la vitesse aura varié de V_1 à V_1', sous l'influence d'un excès donné T du travail moteur sur le travail résistant, la variation du carré des vitesses

$$V_1'^2 - V_1^2 = \frac{2T}{I},$$

sera d'autant plus petite que le moment d'inertie des pièces douées du mouvement de rotation, ou la masse des pièces animées d'un mouvement de transport, sont plus considérables. Ainsi, après avoir, par une bonne disposition des machines, par une répartition symétrique des résistances, etc., diminué autant que possible l'excès alternatif de travail qui produit l'irrégularité, on pourra restreindre autant qu'on le voudra la variation de vitesse en augmentant

le moment d'inertie ou la masse de toutes les pièces mobiles, ou, ce qui est plus simple, le moment d'inertie de l'une d'elles, spécialement destinée à cet usage.

Cette pièce est ce que l'on nomme *le volant*, qui se compose d'un anneau ordinairement en fonte, d'un grand diamètre, avec bras en fonte, que l'on place aussi près que possible des parties de la machine douées du mouvement variable, afin que l'irrégularité qu'elles occasionnent se transmette moins aux autres organes.

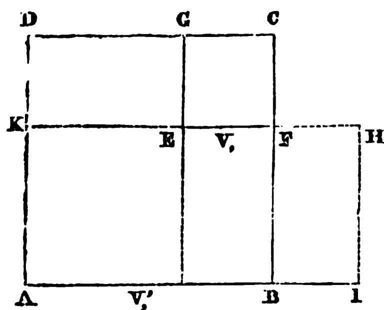


Fig. 77.

Dans l'établissement du volant, on néglige ordinairement l'influence régulatrice des autres masses, qui contribuent cependant à assurer une régularité plus grande que celle qui serait obtenue par le volant seul.

On remarquera d'abord que la différence des carrés des vitesses

$$V_1'^2 - V_1^2 = (V_1' + V_1)(V_1' - V_1),$$

ce qui est évident par l'examen de la figure, où

$$AB = V_1' \text{ et } EF = V_1.$$

On voit en effet que

$$V_1'^2 - V_1^2 = ABCD - EFCG = ABKF + KEGD$$
$$= AIHK = AI \times IH = (V_1' + V^1)(V_1' - V_1).$$

Si de plus on appelle U la moyenne arithmétique

$$\frac{V_1' + V_1}{2}$$

entre les vitesses V'_1 et V_1, on remarquera que U différera très-peu de la vitesse moyenne de la machine déduite du nombre de tours qu'elle fait, et qui est ordinairement

donnée d'avance d'après la constitution de la machine; on aura donc

$$V_1'^2 - V_1^2 = 2U(V_1' - V_1),$$

et par conséquent

$$2U(V_1' - V_1) = \frac{2T}{I},$$

d'où

$$V_1' - V_1 = \frac{T}{UI}.$$

Si maintenant, pour obtenir un degré de régularité donné, on s'impose la condition que la vitesse angulaire ne varie pas de plus d'une fraction $\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne U, on aura

$$V_1' - V_1 = \frac{U}{n},$$

et par suite

$$\frac{U}{n} = \frac{T}{UI};$$

d'où l'on tire

$$I = \frac{nT}{U^2}.$$

On voit donc que, quand l'excès du travail moteur sur le travail résistant, ou *vice versa*, sera donné, ainsi que la vitesse angulaire moyenne de rotation de l'arbre du volant et le nombre régulateur n, on déduira de cette expression simple le moment d'inertie du volant.

On remarquera que ce moment d'inertie sera d'autant plus petit que la vitesse angulaire moyenne sera plus grande, et que par conséquent il convient, quand on le peut, de placer le volant sur l'axe dont le mouvement est le plus rapide.

Dans le calcul du moment d'inertie d'un volant, on néglige ordinairement l'influence des bras, et l'on a alors à très-peu près $I = \frac{P'}{g} R^2$, P' étant le poids de l'anneau et R son rayon moyen. On sait d'ailleurs que

$$P' = d.a.b \times 6.28R,$$

a et *b* étant la largeur et l'épaisseur de cet anneau, R son rayon moyen, et $d = 7290^{kil}$ le poids du mètre cube de fonte. Si l'on veut tenir compte de l'influence des bras, en nommant P'' le poids de ces bras, le moment d'inertie a pour valeur approchée

$$\left(\frac{P' + 0,325P''}{g}\right)R^2 = \frac{P}{g}.R^2,$$

en posant $P = P' + 0,325P''$.

Quant au nombre régulateur *n*, il dépend de la nature de la machine et de la qualité des produits à obtenir, et ne saurait être toujours le même pour une classe donnée de machines. Ainsi pour les machines à vapeur, le degré de régularité dépend des produits à obtenir; et, si pour beaucoup de cas il peut sans inconvénient être le même, dans d'autres il doit varier. Pour la filature du coton, du lin, de la laine; pour la fabrication du papier à la mécanique, ce nombre doit augmenter avec la perfection des produits que l'on veut fabriquer.

Pour les laminoirs, il ne faut pas, comme on le fait trop souvent, adopter le même volant quand on doit étirer de gros fers, de grosses tôles, qui occasionnent de grandes irrégularités et dont le travail ne se fait que par intermittences, que quand on lamine avec continuité pendant des heures entières de petites tôles qui se succèdent rapidement les unes aux autres. C'est par l'observation de la marche des bonnes machines, et par le calcul, que l'on peut parvenir à déterminer pour chaque cas spécial le degré de régularité convenable.

Nous donnerons plus tard une théorie complète et une solution graphique de la question des volants des machines à vapeur; pour le moment nous nous contenterons, après avoir exposé les principes fondamentaux, de rapporter les formules pratiques usuelles pour plusieurs cas importants.

211. *Machines à vapeur à pleine pression.* — Dans ce cas

on emploiera les formules suivantes, selon que les longueurs des bielles seront égales à

$$\left.\begin{array}{lll} \text{6 fois la manivelle,} & & PV^2 = 5227{,}3\,\frac{nN}{m} \\ 5 & — & PV^2 = 5528{,}2\,\frac{nN}{m} \\ 4 & — & PV^2 = 5829{,}4\,\frac{nN}{m} \end{array}\right\}\ \text{avec balancier.}$$

$$\begin{array}{lll} 5 & — & PV^2 = 5592{,}0\,\frac{nN}{m}\quad \text{sans balancier.} \end{array}$$

Dans ces formules, N est la force nominale en chevaux, m le nombre de tours de l'arbre du volant en 1', V la vitesse moyenne de la circonférence moyenne de l'anneau.

Le nombre n, d'après la pratique ordinaire de Watt, est habituellement égal à 32 pour tous les cas qui n'exigent pas une régularité extraordinaire. Pour les moulins à farine, les scieries, etc., on pourrait peut-être le diminuer un peu, tandis que pour les filatures en fin il conviendra de l'augmenter et de le porter à 50 ou 60.

Le volant de la filature du Logelbach a fourni les données suivantes :

$$\text{Diamètre du volant} = 6^{m},10. \quad m = 19,$$

$$V = \frac{3{,}14 \times 6{,}10 \times 19}{60} = 6^{m},05, \quad N = 35 \text{ chevaux},$$

si l'on fait $n = 40$,

$$P = \frac{5227{,}3}{(6{,}05)^2} \times \frac{40 \times 35}{19} = 10520 \text{ kilogrammes.}$$

Pour $n = 35$, on trouve $P = 9276$ kilog. Les constructeurs ont fait $P = 9320$ kil.

212. *Volants pour les machines à détente.* — L'irrégularité d'action de la vapeur étant plus grande, comme on le verra plus tard, le volant doit être augmenté, et je donnerai ici,

La formule donne

$$P=\frac{30000}{(7,02)^2}=609 \text{ kil.}$$

On place ordinairement deux volants, dont chacun pèse la moitié du poids ci-dessus. A la scierie de Metz, les deux volants ne pesaient ensemble qu'environ 512 kilogrammes.

218. *Nécessité de l'emploi des volants dans les machines où il y a des chocs.* — Un exemple frappant de la nécessité de l'emploi des volants dans les machines où il se produit des chocs a été observé en 1845, à la poudrerie de Vonges et à celle de Saint-Ponce, dans quatre moulins à pilons. En substituant, pour des constructions nouvelles, des engrenages en fonte aux anciens rouets en bois, on avait eu le soin d'augmenter dans le rapport de 2 à 3 les dimensions des dents et des roues, fournies par les règles ordinaires de la pratique. Malgré cette précaution, trois moulins ayant été mis en activité, les roues d'engrenage ne purent résister aux vibrations produites par les chocs et se brisèrent aux anneaux après un court service. Pour remédier à cet inconvénient, deux moyens se présentaient : l'un, qui consistait à augmenter considérablement les dimensions des roues, fut employé à cause de l'urgence, pour les roues cassées; l'autre, plus rationnel, était de placer des volants sur les arbres à cames, pour diminuer les variations de leur vitesse, et, par suite, les chocs entre les roues et les pignons. Il a parfaitement réussi, et l'engrenage du quatrième moulin, exactement semblable à ceux qui avaient été brisés quand il n'y avait pas de volant, a très-bien résisté, avec l'emploi de ce moyen de régularisation.

219. *Proportions des volants pour les moulins à poudre de vingt pilons.* — Les pilons des moulins à poudre pèsent 40 à 42 kilogrammes et battent 56 coups à la minute à raison de deux pour chacun par tour de l'arbre à cames. L'expérience a prouvé que des volants de $2^m,50$ de diamètre, $0^m,17$ de

largeur à la couronne dans le sens de l'axe, et $0^m,18$ dans celui du rayon, étaient suffisants.

220. *Laminoir à grandes tôles et à gros fers.* — Dans ces machines, l'observation montre que l'on peut calculer le volant par la formule suivante

$$P = \frac{130000NK}{mV^2};$$

N étant la force en chevaux transmise à l'arbre du volant;

V la vitesse moyenne de la circonférence milieu de cet anneau;

m le nombre de tours du volant, ordinairement placé sur le même axe que les cylindres, en 1';

K un coefficient numérique constant que l'on prendra égal à :

$K=20$ pour les machines de 80 à 100 chevaux, et 6 à 8 équipages de cylindres;

$K=25$ pour les machines de 60 chevaux, et 4 à 6 équipages de cylindres;

$K=80$ pour les machines de 30 à 40 chevaux et un seul équipage pour grosses tôles à fer ou deux cylindres.

Exemple : $D=2^m,84$, $m=60$, $V=18^m,40$.

Pour 6 équipages marchant ensemble

$$P = \frac{130\,000 \times 60 \times 25}{60 \times (18,40)^2} = 9599 \text{ kil.}$$

L'usine de Fourchambault, placée dans ces circonstances, a un volant de 8000 kilogrammes seulement.

Lorsque les machines dont on veut régulariser la marche ont pour moteur des roues hydrauliques à mouvement rapide, telles que les roues à aubes planes et à aubes courbes, le moment d'inertie de ces roues étant ordinairement considérable, il s'ajoute à celui du volant, et dès lors il est possible de diminuer un peu celui-ci, surtout si le moteur est près de la résistance.

221. *Observation sur l'emploi des volants.* — Il résulte de tout ce que l'on a dit précédemment que les volants n'ont pour but et pour effet que de resserrer les variations de la vitesse entre des limites données lorsqu'il y a dans la marche des pièces, ou dans l'action des moteurs ou des résistances, des inégalités ou des alternatives inévitables, ou, dans certains cas, d'accumuler, d'emmagasiner, pendant une portion des périodes du mouvement, une quantité de travail moteur, pour la restituer à d'autres instants où le travail de la résistance l'emporterait sur celui du moteur. Ce n'est donc que momentanément que l'emploi du volant peut, dans ce dernier cas, augmenter la puissance de la machine.

Mais, le volant étant toujours une pièce lourde qui donne lieu à une consommation inutile de travail par le frottement et par la résistance de l'air, on voit qu'il faut en restreindre l'emploi aux cas où il est nécessaire, et en limiter convenablement le poids.

DU FROTTEMENT.

222. — On distingue ordinairement deux sortes de frottements. L'un, qu'on nomme *frottement de glissement*, se produit quand les corps glissent l'un sur l'autre, d'où il résulte que les points de contact primitifs se trouvent sans cesse à des distances respectivement différentes des nouveaux points de contact, ce que l'on exprime en disant qu'ils ont éprouvé des déplacements relatifs inégaux ou dirigés en sens contraires. Le second genre de *frottement*, improprement appelé *frottement de roulement*, a lieu quand les corps roulent l'un sur l'autre, et qu'alors les distances des nouveaux points de contact aux anciens sont les mêmes sur les deux corps, ou que les déplacements relatifs sont égaux. Comme le mot *frotter* implique généralement l'idée de glissement, et non celle de roulement, il conviendrait de n'admettre qu'une seule espèce de frottement, celui de glissement, et de désigner l'autre par le nom de *résistance au roulement*.

223. *Rappel des anciennes expériences.* — Les premières expériences, que l'on connaisse sur le frottement de glissement, sont dues à Amontons, et sont insérées dans les Mémoires de l'ancienne Académie des sciences, année 1699. Ce physicien reconnut que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces; mais il estima sa valeur au tiers de la pression pour le bois, le fer, le cuivre, le plomb, etc., enduits de saindoux, ce qui est beaucoup trop considérable.

Coulomb, officier du génie militaire et quelques années plus tard membre de l'Institut, a présenté en 1781, à l'Académie des sciences, des expériences beaucoup plus complètes

que celles d'Amontons et qui ont été exécutées à Rochefort. L'appareil qu'il a employé consistait en un banc formé de deux pièces de bois horizontales de 6 pieds de longueur, sur lequel un traîneau chargé de poids glissait par l'action d'un poids suspendu à une corde qui, passant sur une poulie de renvoi, venait horizontalement s'attacher au traîneau.

A l'aide de ces dispositions, Coulomb a d'abord déterminé l'effort nécessaire pour produire le mouvement lorsque les corps sont restés pendant quelque temps en contact. C'est ce qu'il a appelé *la résistance ou le frottement au départ.* Il a reconnu que ce frottement était proportionnel à la pression, et il a cru trouver qu'il se composait d'une partie proportionnelle à l'étendue de la surface de contact, qu'il a nommée *l'adhérence*, et d'une autre partie indépendante de cette surface. Il a ensuite recherché la valeur du frottement pendant le mouvement, et à cet effet il a observé, à l'aide d'une montre à demi-secondes, à arrêt, le temps employé par le traîneau, à parcourir successivement les trois premiers et les trois seconds pieds de sa course.

Mais comme sur ces durées, parfois égales à 1″ ou 2″, il pouvait se tromper d'une demi-seconde à la fin, et d'autant au commencement de l'expérience, il en est résulté des incertitudes assez grandes, qui ne lui ont pas permis d'établir ses conclusions d'une manière positive, et l'on peut dire qu'il a plutôt deviné qu'observé les lois qu'il a conclues de ses expériences. Néanmoins il a reconnu qu'en général le frottement pendant le mouvement est 1° proportionnel à la pression, 2° indépendant de l'étendue des surfaces de contact, 3° indépendant de la vitesse du mouvement, sauf quelques restrictions que les expériences ultérieures n'ont pas confirmées.

Coulomb a aussi constaté le premier que pour les corps compressibles le frottement au départ ou après un contact de quelque durée était plus grand qu'il n'est après le premier déplacement.

224. *Expériences de Metz.* — Les incertitudes des observations, les restrictions apportées par Coulomb et surtout l'emploi plus général des métaux dans la construction des machines, ayant rendu nécessaires de nouvelles expériences, j'en ai exécuté à Metz en 1831-32-33 et 34, à l'aide de procédés nouveaux.

225. *Description sommaire des appareils employés.* — Dans la halle des fontes de l'ancienne fonderie, sur un sol dallé et à côté de la fosse (pl. III), on a établi un banc horizontal composé de deux poutres parallèles en chêne AA, de $0^m,30$ d'équarrissage sur 8 mètres de long, réunies et supportées de mètre en mètre par des semelles. Ces poutres, qui dépassaient de $1^m,30$ environ le bord de la fosse, étaient assemblées avec quatre montants verticaux BB, entre lesquels était placé un plateau FF, qui portait la poulie de renvoi de la corde à laquelle on suspendait le poids moteur, placé dans une caisse K. Cette corde venait horizontalement se fixer à un traîneau D, chargé de poids, sous lequel on fixait les corps en expérience.

La corde, au lieu d'être attachée directement à ce traîneau, s'accrochait à la lame antérieure d'un dynamomètre à style, dont la flexion mesurait la tension de cette corde, soit au départ, soit pendant le mouvement.

L'axe de la poulie de renvoi portait un plateau H en cuivre, parfaitement dressé et recouvert d'une feuille de papier. Vis-à-vis ce plateau, un appareil d'horlogerie communiquait un mouvement uniforme à un style formé par un pinceau imbibé d'encre de Chine, dont la pointe décrivait un cercle de $0^m,14$ de diamètre. Le parallélisme du plan de ce cercle et de celui du plateau était d'ailleurs parfaitement assuré par des moyens précis et le contact du pinceau était produit ou interrompu à volonté.

Sur la caisse K l'on pouvait en poser deux autres dans lesquelles on plaçait également des poids, ces caisses, après avoir commencé à produire le mouvement, étaient à une certaine

hauteur, arrêtées sur des taquets, de sorte que le mouvement ne continuait qu'en vertu de la charge et du poids de la caisse Q. Par ce moyen l'on a pu, à volonté, obtenir avec la caisse Q seule un mouvement accéléré, et avec les trois caisses, un mouvement d'abord accéléré, puis uniforme ou retardé, selon que le poids de la caisse était suffisant pour vaincre le frottement, ou inférieur à cette résistance.

On peut consulter pour plus de détails sur ces expériences, le Recueil des savants étrangers, tomes IV et V, ainsi qu'un mémoire publié en 1838, chez M. Carilian Gœury.

226. *Examen des résultats graphiques des expériences.* — On conçoit, d'après ce que l'on a dit précédemment sur l'appareil analogue qui existe au Conservatoire des arts et métiers, que, de la simultanéité des deux mouvements dont l'un, celui du style, était uniforme et à une vitesse connue, et l'autre, inconnu, correspondait dans un rapport constant aux chemins parcourus par le traîneau, il devait résulter une courbe dont le relèvement donnait la loi du mouvement de ce traîneau. On a donc pu par ce relèvement former une table des espaces parcourus et des temps correspondants et construire la courbe dont ces espaces étaient les abcisses et les temps les ordonnées. Les courbes ainsi construites offraient une continuité parfaite, et l'on a reconnu, ainsi qu'il est indiqué au n° 81, qu'elles étaient des paraboles, c'est-à-dire que leurs abscisses étaient proportionnelles aux carrés des ordonnées.

De ce que cette courbe était une parabole, on a été autorisé à conclure que le mouvement avait été uniformément accéléré. Or, le poids moteur étant constant, la force motrice qui produisait l'accélération du mouvement était l'excès de ce poids sur le frottement, et, puisque cet excès était constant, il en résultait nécessairement que le frottement était constant et indépendant de la vitesse.

L'expérience, répétée avec tous les corps en usage dans la construction des machines, avec ou sans enduit, ayant

toujours conduit à la même conséquence, on a été autorisé à regarder cette loi comme générale, du moins dans les limites de vitesse où elle a été observée, c'est-à-dire jusqu'à $3^m,50$ environ, et à reconnaître que les restrictions que Coulomb y avait entrevues n'existent pas.

227. *Formules employées au calcul des résultats des expériences.* — L'appareil que nous venons de décrire succinctement nous offre un exemple assez simple d'une machine dans laquelle le mouvement est varié et nous permet de faire l'application des principes généraux qui ont été exposés jusqu'ici. Nous en profiterons pour montrer comment on doit procéder dans des cas analogues.

Appelons P le poids de la caisse descendante y compris son poids et celui de la portion de corde qui pend toujours sous la poulie, en négligeant la quantité dont elle augmente dans la descente, et qui ne s'élève guère qu'à 1 kilogramme; T la tension du brin horizontal; $q=6^{kil},254$ le poids de la poulie.

V_1 la vitesse angulaire de la poulie à l'instant que l'on considère.

v_1 la quantité dont cette vitesse varie dans l'élément de temps t.

$I=0,00629$ le moment d'inertie de la poulie et des pièces qui tournent avec elle.

$f=0,164$ le rapport, déterminé par des expériences spéciales, du frottement à la pression, pour l'axe en fer de la poulie et ses coussinets en bois de sorbier à l'état onctueux; $R=0,032T$ la roideur de la corde tressée, déterminée aussi par des expériences spéciales.

N la pression sur les tourillons de l'axe de la poulie.

r le rayon de la poulie.

r' le rayon de ses tourillons.

Si l'on se reporte aux principes exposés au n° 186, sur le mouvement de rotation varié, l'on verra qu'à chaque instant du mouvement de la poulie, la somme des moments

des forces extérieures doit être égale à la somme des moments des forces d'inertie.

Or, la somme des moments des forces extérieures est

$$Pr - Tr - Rr - fN.r'.$$

La somme des moments des forces d'inertie, correspondant à une variation v_1 de la vitesse angulaire est facile à trouver; car l'une de ces forces, relative à une molécule de masse m, située à la distance r_1, étant $m.\frac{v_1 r_1}{t}$, son moment par rapport à l'axe est $mr_1^2\frac{v_1}{t}$, et la somme des moments semblables est I $\frac{v_1}{t}$, pour toutes les parties qui tournent autour de l'axe.

La force d'inertie du poids P est $\frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}$, et son moment par rapport à l'axe est $\frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}r$, et doit s'ajouter au précédent; on a donc, à chaque instant du mouvement varié de la poulie, la relation

$$Pr - Tr - Rr - fNr' = I\frac{v_1}{t} + \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}.r.$$

La pression N sur l'axe de la poulie est la résultante de deux forces perpendiculaires, l'une horizontale, égale à la tension T, l'autre verticale et égale au poids P de la caisse, augmenté de celui q de la poulie, et diminué de la force d'inertie $\frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}$, qui se développe dans l'accélération du mouvement vertical du poids P, et qui s'oppose à son accélération; on a donc

$$N = \sqrt{\left(P + q - \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}\right)^2 + T^2}.$$

Or, d'après un théorème d'algèbre dû à M. Poncelet, la valeur d'un radical de la forme $\sqrt{a^2+b^2}$, dans lequel on sait

à l'avance que l'on a $a > b$, est donnée à $\frac{1}{25}$ près par la formule $0,96a + 0,4b$. En l'appliquant au cas actuel, où l'on a toujours $P + q - \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t} > T$, puisque le poids P surmonte la résistance T et le frottement du traîneau, on a à $\frac{1}{25}$ près

$$N = 0,96\left\{P + q - \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}\right\} + 0,4T.$$

La relation d'égalité des moments devient donc, en y faisant $R = 0,032T$,

$$Pr - Tr - 0,032Tr - 0,96fr'\left\{P + q - \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}\right\} - 0,4fr'T$$

$$= \frac{Iv_1 r}{r.t} + \frac{P}{g}.\frac{v_1 r}{t}r,$$

et en tirant de cette équation du premier degré la valeur de la tension cherchée T, du brin horizontal de la corde on trouve

$$T\left\{1 + 0,032 + 04\frac{fr'}{r}\right\} = P\left\{1 - 0,96\frac{fr'}{r}\right\}$$

$$-0,96fq\frac{r'}{r} - \frac{P}{g}\frac{v_1 r}{t}\left\{1 - 0,96\frac{fr'}{r}\right\} - \frac{I}{r^2}\frac{v_1 r}{t}.$$

En substituant pour les quantités connues leurs valeurs qui sont

$f = 0,164$, $r' = 0^m,0093$, $r = 0^m,111$, $I = 0,00629$ d'où $\frac{I}{r^2} = 0,51$,

on a pour la formule pratique qui donne la tension T, quand on connaît le poids P de la caisse

$$T = 0,95\left\{P - \left(0,516 + \frac{P}{g}\right)\frac{v_1 r}{t}\right\} - 0^{kil},086.$$

Lorsque l'expérience aura démontré que l'accélération $\frac{v_1 r}{t}$ est constante, et que le relèvement des courbes, en donnant leur équation $T^2 = 2CE$, aura fourni pour cette accélération

la valeur $\frac{v_1 r}{t} = \frac{1}{C}$, en nommant 2C le paramètre de la parabole, on aura tous les éléments nécessaires pour calculer la valeur de la tension de la corde dans l'expérience. Elle sera

$$T = 0{,}95 \left\{P - \left(0{,}516 + \frac{P}{g}\right)\frac{1}{C}\right\} - 0^{\text{kil}}{,}086.$$

Dans le cas où le mouvement est uniforme, l'accélération $\frac{v_1 r}{t} = \frac{1}{C}$ devient nulle, et la formule ci-dessus se réduit à

$$T = 0{,}95P - 0^{\text{kil}}{,}086,$$

ou simplement $T = 0{,}95P$, à cause de la faible valeur du deuxième terme $0^{\text{kil}},086$.

En relevant directement, d'après les courbes de tension du dynamomètre, les valeurs de T, relatives à plus de quarante expériences dans lesquelles les charges ont varié depuis 12 jusqu'à 95 kilogrammes, on a trouvé que le rapport de la tension à la charge, ainsi fourni par mesure directe, était de 0,96, ce qui montre que l'ensemble des données introduites dans la formule ci-dessus conduit à un résultat qui s'accorde avec cette mesure dans des limites d'exactitude bien suffisantes.

228. *Relation entre la tension de la corde et le frottement du traîneau.* — Connaissant la tension T de la corde, à l'aide du dynamomètre, ou l'ayant calculée par la formule précédente, il devient facile d'en déduire la valeur du frottement cherché du traîneau, en appliquant directement le principe de l'action égale et contraire à la réaction. En effet, la tension T et le frottement cherché F sont deux forces extérieures dirigées en sens contraires, et dont la différence $T - F$ produit l'accélération du mouvement du traîneau. D'une autre part, la résistance que l'inertie du poids Q du traîneau oppose à cette accélération est, n° 62, $\frac{Q}{g}\frac{v_1 r}{t}$.

On a donc pour l'égalité de l'action à la réaction

$$T - F = \frac{Q}{g}\frac{v_1 r}{t} = \frac{Q}{g}\frac{1}{C},$$

d'où

$$F = T - \frac{Q}{g}\frac{1}{C}.$$

Lors donc qu'on aura, par l'observation directe, à l'aide du dynamomètre ou par la formule du numéro précédent, déterminé la tension de la corde on en retranchera la quantité $\frac{Q}{g}\frac{1}{C}$, facile à calculer quand on connaît par le relèvement le paramètre $2C$ de la courbe du mouvement, et l'on aura la valeur du frottement. Telle est la marche qui a été suivie pour le calcul de toutes les expériences où le mouvement a été accéléré ; quant à celles où le mouvement était uniforme, on a simplement $F = T$.

On voit que la loi du mouvement étant une fois connue par le relèvement des courbes, et étant celle d'un mouvement uniformément accéléré, on a pu, après avoir constaté la constance et la généralité de cette loi, se passer de l'usage du dynamomètre et se contenter des indications de l'appareil chronométrique.

229. *Résultats d'expériences.* — Je reproduis, comme exemples des résultats obtenus, quelques-uns des tableaux insérés dans mes mémoires, successivement présentés à l'Institut, et insérés au Recueil des savants étrangers, et comme exemple de l'application des formules précédentes, je choisis la deuxième expérience du premier de ces tableaux, relative au frottement du chêne, glissant sur du chêne sans enduit, et les fibres étant parallèles au sens du mouvement.

Dans cette expérience l'on avait

$$Q = 133^{kil},86, \quad P = 92^{kil},22.$$

Le tracé de la courbe donne pour le paramètre $2C = 2^m,08$,

d'où

$$\frac{1}{C} = 0,961,$$

et par suite la tension

$$T = 0{,}95\left\{P - \left(0{,}516 + \frac{P}{g}\right)\frac{1}{C}\right\} - 0^{kil},086 = 78^{kil},45.$$

L'autre formule donne pour la valeur du frottement

$$F = T - \frac{Q}{g}\cdot\frac{1}{C} = 65^{kil},34.$$

Le rapport du frottement à la pression est donc ici :

$$\frac{F}{Q} = \frac{65{,}34}{133{,}86} = 0{,}488.$$

Expériences sur le frottement du chêne en mouvement sur du chêne sans enduit.

Les fibres du bois sont parallèles au sens du mouvement.

Étendue de la surface de contact.	Pression.	Poids moteur pendant le mouvement.	Tension de la corde.	Paramètre.	Valeur de l'accélération $\frac{1}{C}$	Frottement.	Rapport du frottement à la pression.	Vitesse du mouvement	
								uniforme.	accéléré, à 1m,60 de course.
m. q.	kil.	kil.	kil.	m.		kil.		m.	m.
0,2600	133,86	67,37	64,00	»	»	64,00	0,477	0,69	»
	133,86	92,22	78,45	2,08	0,961	65,34	0,488	»	2,37
	151,21	77,55	73,67	»	»	73,67	0,487	»	»
	440,01	228,66	217,23	»	»	217 23	0,493	0,41	»
	440,01	276,59	243,32	2,79	0,710	211,48	0,480	»	2,05
	679,73	421,78	371,43	2,83	0,706	321,52	0,472	»	2,04
	1039,03	577,51	528,19	5,54	0,361	489,96	0,471	»	1,92
	1039,03	505,51	480,23	»	»	480,23	0,460	1,07	»
0,0880	46,29	29,45	24,56	6,28	0,318	23,06	0,498	»	1,37
	49,21	25,66	24,38	»	»	24,38	0,496	1,28	»
	54,66	28,52	27,09	»	»	27,09	0,495	1,50	»
	54,66	44,61	34,66	1,26	1,587	25,82	0,472	»	3,07
	102,84	84,71	69,18	1,55	1,290	50,05	0,486	»	2,72
	103,21	60,14	53,40	3,46	0,578	47,32	0,460	»	1,86
	150,88	73,78	70,09	»	»	70,09	0,464	1,25	»
	199,52	95,84	91,04	»	»	91,04	0,456	0,61	»
	199,61	95,42	90,65	»	»	90,65	0,454	0,85	»
0,0031	97,79	49,25	46,79	»	»	46,79	0,477	1,06	»
	145,76	79,57	70,16	3,06	0,653	60,46	0,483	»	1,81
	273,89	212,56	176,58	1,66	1,200	133,08	0,484	»	2,70

Lorsque le mouvement est uniforme, comme dans la seizième expérience du même tableau, on a simplement

$$\text{pour } Q = 199^{\text{kil}},52, \quad P = 95^{\text{kil}},84,$$

$$F = 0,95P = 91^{\text{kil}},04, \quad f = \frac{F}{Q} = \frac{91,04}{199,52} = 0,456.$$

L'examen des divers tableaux qui sont relatifs à des cas très-variés établit complétement les lois du frottement qui a lieu pendant le mouvement entre la plupart des matières employées dans les arts. Les résultats de toutes les autres expériences ont été conformes à ceux que nous nous contentons de rapporter ici.

Expériences sur le frottement de l'orme en mouvement sur du chêne sans enduit.

Les fibres du bois sont parallèles au sens du mouvement.

ÉTENDUE de la surface de contact.	NATURE de l'enduit.	PRESSION Q.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement, P.	TENSION de la corde pendant le mouvement, T.	PARAMÈTRE 2 C.	FROTTEMENT F.	RAPPORT DU FROTTEMENT à la pression, f.	VITESSE du mouvement, à 3m.00 de course.
m. q.	kil.	kil.	kil.	kil.		kil.		m.
0,1243	117,91	73,14	63,11	2,40	0,83	53,13	0,45	2,30
	117,91	84.98	69.40	1,54	1,29	53,90	0,45	2,88
	417,77	229,74	204,22	3,23	0,619	177,86	0,42	1,97
	417,77	217,75	199,71	6,10	0,328	185,75	0,44	1,41
	417,77	205,91	188,97	6,24	0,321	175,30	0,42	1,37
	417,77	301,26	238,37	1,24	1,610	169,82	0,41	3,08
	897,81	505,03	442,96	2,63	0,761	372,60	0,43	2,26
	897,81	456,94	420,36	6,54	0,305	392,45	0,41	1,23
	897,81	505,03	413,25	3,96	0,505	357,03	0,41	1,73
	897,81	588,85	500,96	1,97	1,015	408,07	0,45	2,47
0,0059	111,00	61,40	55,48	4,64	0,431	49,39	0,45	1,60
	176,64	141,10	109,12	1,14	1,754	77,73	0,44	3,20
	416,14	217,53	199,42	5,69	0,332	185,31	0,44	1,45
						Moyenne.....	0,432	

Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre oolithique de Jaumont, près Metz, en mouvement sur de la pierre de même nature sans enduit.

ÉTENDUE de la surface de contact.	NATURE de l'enduit.	PRESSION Q.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement, P.	TENSION de la corde pendant le mouvement, T.	PARAMÈTRE 2 C.	FROTTEMENT F.	RAPPORT DU FROTTEMENT à la pression, f.	VITESSE du mouvement, à $3^m,00$ de course.
m. q.	kil.	kil.	kil.	m.		kil.		m.
0,0800	142.39	115,25	100,84	2,72	0,735	90,18	0,633	2,10
	142,39	115,25	99,01	2,24	0,892	85,06	0,604	2,31
	572,20	453,25	387,01	2,04	0,980	329,86	0,576	2,42
	578,08	469,25	389,67	1,64	1,219	317,78	0,549	2,70
	578,08	469,25	389,67	1,64	1,219	317,78	0,549	2,70
						Moyenne.....	0,582	
0,0464	140,36	133,25	111,27	1,76	1,136	95,02	0,676	2,59
	150,36	133,25	110,93	1,72	1,162	94,30	0,671	2,64
	570,17	469,25	419,47	3,50	0,571	386,29	0,677	1,85
	570,17	517,25	428,02	1,60	1,250	355,43	0,623	2,74
	570,17	517,25	419,10	1,40	1,428	336,11	0,589	2,93
						Moyenne.....	0,674	
Arêtes arrondies.	135,30	109,25	98,98	4,68	0,427	93,09	0,688	1,60
	135,30	109,25	95,68	2,76	0,724	85,70	0,633	2,08
	135,30	133,25	108,45	1,48	1,351	89,82	0,633	2,85
	271,11	211,25	191,09	4,40	0,454	178,55	0,658	1,65
	271,11	211,25	195,49	8,20	0,244	188,75	0,696	1,21
	271,11	259,25	220,09	1,96	1,020	191,91	0,709	2,47
						Moyenne... .	0,647	
						Moyenne générale.....	0,637	

Lorsque la pierre calcaire tendre glisse sur de la pierre calcaire tendre, et surtout quand le corps mobile ne repose que sur des surfaces de peu d'étendue, celles-ci s'usent rapidement pendant l'expérience. Cette circonstance et la présence de la poussière qui en résulte n'ont pas altéré les lois observées.

Expériences sur le frottement du cuir de bœuf fort, tanné, posé à plat, en mouvement sur la fonte.

ÉTENDUE de la surface de contact.	NATURE de l'enduit.	PRESSION.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement.	TENSION de la corde.	PARAMÈTRE.	VALEUR de l'accélération $\frac{1}{C}$	FROTTEMENT.	RAPPORT DU FROTTEMENT à la pression.	VITESSE du mouvement, à $3^m,00$ de course.
m. q.		kil.	kil.	kil.	m.		kil.		m.
0,0386	Néant.	213,57	145,25	132,32	5,08	0,193	123,67	0,579	1,53
		501,67	289,25	274,79	»	»	274,79	0,540	Lente.
						Moyenne.		0,559	
0,0386	Eau.	131,95	85,25	70,18	1,63	1,227	53,79	0,407	2,70
		131,95	73,25	64,69	1,72	1,162	45,18	0,342	2,64
		131,95	61,25	53,88	3,04	0,657	45,11	0 342	1,98
		505,57	443,25	312,65	0,80	2,500	184,59	0,368	3,87
						Moyenne.		0,365	
0,0386	Suif.	505,15	97,25	87,87	6,70	0,298	74,00	0,146	1,38
		505,15	97,25	90,02	8,48	0,230	78,16	0,154	1,18
		505,15	145,25	126,74	2,61	0,767	87,25	0,172	2,16
		505,15	193,25	158,88	1,56	1,280	82,97	0,164	2,76
						Moyenne.		0,159	
0,0386	Huile.	135,34	17,80	16,91	»	»	16,91	0,124	»
		135,34	41,80	34,59	1,80	1,111	19,28	0,142	2,58
		505,15	67,25	63,89	»	»	63,89	0,126	»
		505,15	97,25	88,97	5,92	0,337	71,61	0,141	1,40
						Moyenne.		0,133	
0,0386	Surfaces onctu^{es}.	505,15	145,25	133,52	6,60	0,303	117,92	0,233	1,42
		217,15	61,25	56,12	6,40	0,312	49,27	0.226	1,42
						Moyenne.		0,320	

Quoique le cuir soit un corps mou et très-compressible, le frottement n'en reste pas moins proportionnel à la pression et indépendant de la vitesse, dans toute l'étendue des expériences faites.

Expériences sur le frottement du cuivre jaune en mouvement sur le chêne, sans enduit.

Les fibres du bois sont parallèles au sens du mouvement.

ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement.	TENSION de la corde.	PARAMÈTRE.	VALEUR de l'accélération $\frac{1}{C}$.	FROTTEMENT.	RAPPORT DU FROTTEMENT à la pression.	VITESSE du mouvement à 3m,00 de course.
	kil.	kil.	kil.					
0,0403	116,59	73,21	69,55	»	»	69,55	0,60	»
	116,59	73,28	69,62	»	»	69,62	0,60	»
	698,22	445,25	422,99	»	»	422,99	0,60	»
	698,22	505,25	484,72	6,08	0,393	456,95	0,65	»
	698,22	577,25	499,76	2,32	0,861	438,48	0,62	2,28
	902,22	625,25	585,36	14,26	0,140	572,49	0,63	0,93
0,0131	112,59	73,33	69,66	»	»	69,66	0,61	»
	112,67	85,41	76,90	4,21	0,475	71,45	0,63	1,59
	346,40	241,25	220,91	6,42	0,311	209,93	0,61	1,50
	694,30	445,25	422,99	»	»	422,99	0,61	»
	694,30	577,25	500,54	2,36	0,847	440,60	0,63	2,29
					Moyenne........		0,617	

Dans les expériences pour lesquelles l'on n'a pas indiqué la valeur du paramètre de la loi du mouvement et celle de l'accélération, le mouvement était lent et un peu incertain.

Les résultats contenus dans ce tableau confirment les trois lois énoncées plus haut, mais on remarquera que la valeur moyenne du frottement qui est ici de 0,617, est plus considérable que dans le cas du chêne frottant sur le chêne, ou dans celui de l'orme frottant sur le même bois de chêne, pour lesquels les résultats sont consignés aux tableaux des pages 262 et 263 : nous verrons par le tableau suivant que le coefficient diminue considérablement lorsque le frottement a lieu entre deux surfaces métalliques.

...périences sur le frottement de la fonte en mouvement sur la fonte.

Étendue de la surface de contact.	Nature de l'enduit.	Pression Q.	Poids moteur pendant le mouvement R.	Tension de la corde pendant le mouvement.	Paramètre 2C.	Valeur de l'accélération $\frac{1}{C}$	Frottement.	Rapport du frottement à la pression.	Vitesse du mouvement à 3m,00 de course.	
		kil.	kil.	kil.	m.				m.	
,0360	Néant.	224,94	49,25	43,43	3.26	0,619	29,24	0,130	1,94	Mouvem. lent.
		224,94	61,25	51,41	1,92	1,041	27,56	0.122	2.50	
		494,74	145.25	128,46	3,08	0,649	95,74	0,193	1.98	
		494,74	193,24	152.55	1,24	1,612	71.27	0,144	3.10	
		500,93	79.25	75,29	»	»	75,29	0,150	»	
		2000.74	361,25	338,06	14,00	0,142	309,11	0,154	0,99	
		2000,74	421,25	392,59	10,88	0.183	355 27	0,177	1,06	
		2000,74	479,25	430,53	3,80	0,526	323,26	0,161	1,77	
						Moyenne.....		0,152		
,0360	Eau.	500,74	181,25	163,76	4,60	0,434	141,61	0,282	2,71	Mouv.uniforme.
		500,74	229,25	196,31	2,12	0,943	147,18	0,293	2,82	
		998,74	349,25	331,79	»	»	331,79	0,332	»	
		998,74	397,25	365,65	6,68	0,299	335,21	0,336	1,38	
						Moyenne.....		0,314		
0360	Savon.	494,74	91,25	86.69	»	»	86.69	0,175	»	Mouvem. lent.
		494,74	145,25	130,48	3,92	0,510	104,74	0,211	1,73	
		494,74	169,25	145,90	2,28	0,877	101,78	0,205	2,16	
						Moyenne.....		0,197		
0360	Suif.	224,94	23,80	22,61	»	»	22,61	0,100	»	Mouvem. lent.
		224,94	35,80	29,69	6,40	0,312	22,85	0,101	1,39	
		500.31	49,25	46,78	»	»	46,78	0,093	»	Mouvem. lent.
		500,31	91,25	81,25	3,48	0,574	51.98	0,103	1,88	
		500.31	109,25	96,52	3.08	0.649	53,42	0,106	1,97	
		1004,31	133.25	122.94	7,50	0,266	95,81	0,095	1,28	
		1004,31	133,25	124.48	13,20	0,151	110,34	0,109	0,94	
		1004,31	193.25	172,16	3,28	0,609	110.04	0,109	1,92	
		2804.75	283.25	269,09	»	»	269,09	0,096	»	Mouv. très-lent.
		502,45	49,25	46,78	»	»	46,78	0.093	»	Mouvem. lent.
						Moyenne.....		0,100		
0360	Saindoux.	500,31	58,71	53,82	6,60	0,303	38,37	0,076	1,38	
			58,71	53,56	5,80	0,344	36,02	0,071	1,44	
			60,71	54,95	4,58	0,436	32,72	0,065	1,71	
			60.71	54.87	4,64	0,431	32,89	0,066	1.70	
			62,71	57,26	5,80	0,340	38,91	0,077	1,44	
			62,71	56,41	4,25	0.470	32,44	0,064	1,68	
			62,73	56,02	4,40	0,454	32,97	0,065	1,66	
			62,73	56,41	4,25	0,470	32,44	0,064	1,68	
			87.71	76.24	2,57	0,778	56,57	0,073	2,17	
			87.71	75,75	2.40	0,833	33,07	0.066	2.22	
			87,71	76,59	2,70	0,740	38,85	0,077	2,08	
						Moyenne.....		00,70		

Ce tableau, outre la vérification des lois de la proportionnalité du frottement à la pression et de son indépendance de la vitesse, montre que l'eau accroît plutôt le frottement de la fonte qu'elle ne le diminue. L'on voit aussi que le suif ferme et un peu dur réduit moins le frottement que le saindoux.

230. *Conséquences des expériences.*—L'ensemble des expériences que j'ai exécutées sur le frottement proprement dit des surfaces planes les unes sur les autres, comprend 179 séries correspondant à des cas différents, soit par la nature, soit par l'état des surfaces en contact. Toutes ces expériences sans exception conduisent aux conséquences suivantes :

Le frottement, pendant le mouvement, est :

1° Proportionnel à la pression ;

2° Indépendant de l'étendue des surfaces de contact ;

3° Indépendant de la vitesse du mouvement.

231. *Expériences sur le frottement au départ ou quand les surfaces ont été quelque temps en contact.* — Le même appareil a servi pour les expériences sur le frottement, au départ ou après un contact prolongé, dont le but était de constater dans quels cas il y avait une différence notable entre ce frottement et celui qui se produit pendant le mouvement. Cette différence qui peut provenir, selon les cas, de causes assez diverses, doit en général être attribuée à la compression réciproque des corps l'un sur l'autre, et à une sorte d'engrènement de leurs éléments. Le temps, la durée de la compression, doit probablement exercer une influence sur l'intensité de la résistance que les surfaces opposent au glissement. Mais, en général, il paraît que cette résistance obtient son maximum au bout d'un temps très-court.

232. *Résultats d'expériences.*—Nous rapporterons ici quelques-uns des résultats des expériences que nous avons exécutées.

Expériences sur le frottement du chêne sur du chêne sans enduit, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.

Les fibres des bandes glissantes sont perpendiculaires à celles des semelles.

ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	EFFORT MOTEUR ou frottement. f.	RAPPORT du frottement à la pression. F.
m. q.	kil.	kil.	
0,0880	54,66	30,45	0,55
	128,09	68,12	0,53
	224,44	114,42	0,51
	904,67	531,00	0,58
	1145,63	583,63	0,51
0,0040	176,54	92,41	0,52
	182,72	96,33	0,53
	662,48	387,58	0,52
		Moyenne.....	0,54

Le frottement paraît être, comme on le voit, proportionnel à la pression, qui a varié de 54 kilog. à 1145 kilog., et indépendant de l'étendue des surfaces de contact, qui ont varié dans le rapport de 1 à 22, la plus petite étant de $0^{m.q},004$ et la plus grande de $0^{m.q},088$; cette dernière valeur surpasse celles qui sont ordinairement employées pour les surfaces glissantes, dans les constructions mécaniques.

Le rapport du frottement à la pression s'élève ici à 0,54, tandis qu'il n'était que de 0,48 pendant le mouvement, ainsi qu'il résulte du tableau de la page 263. Le frottement au départ est donc environ plus élevé d'un huitième que celui que nous avons considéré en premier lieu. Une semblable augmentation se présente dans tous les cas analogues.

Expériences sur le frottement du chêne sur le chêne sans enduit, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.

Les pièces glissantes ont leurs fibres verticales, celles des pièces fixes sont horizontales et parallèles au sens du mouvement.

ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	EFFORT MOTEUR ou frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression. f	DURÉE de contact.
	kil.	kil.		
0,0636	195,93	83,84	0,427	5 à 6"
	195,93	83,84	0,427	10'
	195,93	71,39	0,364	1'
	315,93	160,79	0,509	6'
	315,93	137,99	0,436	30"
	315,93	155,09	0,498	8 à 10'
	399,93	183,79	0,459	8 à 10'
	501,93	251,99	0,502	10'
	501,93	194,99	0,388	5 à 6"
	999,93	367,39	0,367	15'
	999,93	400,19	0,400	10'
		Moyenne.....	0,434	

Ce tableau montre que pour les bois le frottement au départ présente, à surfaces et pressions égales, des différences assez grandes d'une expérience à l'autre, et que cette résistance atteint sa valeur maximum après un temps de contact fort court, qui ne paraît pas dépasser quelques secondes. Nous voyons en effet que les chiffres qui correspondent à 5 et à 6 secondes ne sont pas inférieurs à ceux qui sont relatifs à un contact de 15 minutes, le plus prolongé de ceux consignés au tableau.

La valeur moyenne du rapport f du frottement à la pression est 0,434, mais on fera bien dans les applications de compter sur 0,48 ou même 0,50.

Expériences sur le frottement de la pierre calcaire oolithique sur la pierre calcaire oolithique lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.

ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	EFFORT MOTEUR ou frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression f.	DURÉE du contact.
m.q.	kil.	kil.		
0,0800	142,89	103,79	0,728	15′
	150,02	108,49	0,723	15′
	527,20	430,59	0,752	15′
	578,08	422,99	0,731	5 à 6″
	578,08	434,39	0,751	5 à 6″
		Moyenne......	0,737	
0,0464	140,36	103,79	0,739	2′
	570,17	445,79	0,781	10′
	570,17	445,79	0,781	1′
		Moyenne......	0,733	
Arêtes arrondies.	135,30	103,79	0,774	2′
	273,11	200,68	0,740	5 à 6″
		Moyenne......	0,757	
		Moyenne générale......	0,740	

On voit encore par ces expériences que le frottement au départ est, comme le frottement en marche, indépendant de l'étendue de la surface de contact et proportionnel à la pression. Cette conclusion et la valeur même que l'on déduit des expériences ci-dessus ont été confirmés depuis par les résultats obtenus dans des cas analogues, par M. Boistard, ingénieur en chef des ponts et chaussées, en 1822.

Ces chiffres diffèrent d'ailleurs assez peu les uns des autres pour que l'on puisse accorder toute confiance à la moyenne générale 0,74, et l'employer dans tous les cas semblables.

Expériences sur le frottement de la pierre calcaire oolithique sur la pierre calcaire oolithique, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, avec interposition de mortier frais.

ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	EFFORT MOTEUR ou frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression f.	DURÉE du contact.
m.q.	kil.	kil.		
0,0800	147,67	115,17	0,780	10′
	229,48	183,59	0,800	10′
	355,48	263,39	0,740	15′
	355,48	275,79	0,773	10′
	355,48	251,99	0,709	10′
	529,48	445,79	0,841	15′
		Moyenne......	0,773	
0,0464	140,36	108,49	0,772	10′
	222,17	172,19	0,775	10′
	354,17	257,69	0,727	10′
	528,17	365,99	0,792	15′
	528,17	411,59	0,779	10′
	530,17	365,99	0,690	10′
	702,17	525,59	0,748	15′
		Moyenne......	0,745	
0,0152	145,02	115,19	0,794	10′
	226,83	137,99	0,608	10′
	358,83	217,79	0,607	10′
	526,83	331,79	0,629	15′
		Moyenne......	0,659	
		Moyenne générale......	0,735	

Ces expériences montrent que le frottement au départ est pour ces pierres, à très-peu près le même, avec interposition de mortier, que sans mortier.

En résumé, les nouvelles épreuves ont fait voir que le frottement, au moment du départ et après une durée très-courte de contact, est :

1° Proportionnel à la pression

2° Indépendant de l'étendue des surfaces de contact, et que de plus, pour les corps compressibles, il est notablement plus grand que celui qui a lieu pendant le mouvement.

233. *Observation relative à l'expulsion des enduits sous de fortes pressions et par un contact prolongé.* — Cependant on a observé que pour les corps métalliques enduits de graisse ou d'huile, sous des pressions assez grandes par rapport à l'étendue des surfaces, il arrivait qu'après un contact de quelque durée, les enduits étant expulsés, les surfaces arrivaient alors à un état simplement onctueux, pour lequel le frottement est plus grand et plus que double de sa valeur dans le cas où les surfaces sont bien graissées. Cette observation explique comment il arrive que l'effort nécessaire pour mettre en mouvement certaines machines est, abstraction faite de l'influence de l'inertie, souvent beaucoup plus considérable que celui qui est nécessaire pour entretenir un mouvement rapide. Cela prouve en passant que pour apprécier expérimentalement les frottements des machines en mouvement il ne faut pas employer les mêmes moyens que pour les machines partant du repos, ainsi que le font quelquefois les expérimentateurs.

234. *Influence des vibrations sur le frottement au départ.* — Une autre circonstance remarquable que les expériences de Metz ont signalée, c'est que, quand un corps compressible est sollicité à glisser, par un effort qui serait capable de vaincre le frottement pendant le mouvement, mais inférieur au frottement au départ, une simple vibration, produite souvent par une cause extérieure et légère en apparence, peut déterminer le mouvement. Ainsi, pour du bois de chêne frottant sur du chêne, le frottement au départ est 0,680 de la pression, et le frottement pendant le mouvement en est les 0,480; de sorte que pour produire le mouvement d'un poids de 1000 kilogrammes il faut alors exercer un effort de 680 kilogrammes, tandis qu'il n'en faut qu'un

de 480 kilogrammes pour l'entretenir. Cependant, sous un effort égal ou peu supérieur à 480 kilogrammes, et par l'effet d'une vibration, le corps pourrait marcher.

Cette observation importante s'applique aux constructions, toujours plus ou moins exposées à des vibrations, et montre que, si dans le calcul des appareils ou machines destinées à produire le mouvement on doit compter sur la plus grande valeur du frottement, dans ceux qui sont relatifs à la stabilité des constructions on doit au contraire n'introduire que sa plus petite valeur, celle qui a lieu pendant le mouvement. Elle sert enfin à expliquer comment il arrive quelquefois que des édifices, qui ne donnaient aucune inquiétude sur leur stabilité, s'écroulent tout à coup par le passage d'une voiture, et comment le tir par salves d'une batterie de brèche peut, à certains instants, accélérer la chute d'un rempart ou d'un bâtiment.

235. *Influence des enduits.* — Les enduits gras diminuent considérablement le frottement et l'usure des surfaces, qui en est la conséquence. Mais d'après l'observation que nous avons faite (au n° **230**), on voit que, bien que le frottement soit en lui-même indépendant de l'étendue des surfaces, il convient de proportionner celles-ci aux pressions qu'elles doivent supporter, afin que les enduits ne soient pas expulsés. Il faut aussi remarquer que toutes les expériences dont il est question ont été faites sous des pressions plus ou moins considérables, et que les résultats ne doivent s'appliquer qu'à des circonstances analogues. On conçoit en effet que, si les pressions étaient tellement grandes, par rapport aux surfaces, qu'il en résultât une dégradation notable, l'état des surfaces, et par conséquent le frottement, varierait; ou que, si au contraire les surfaces étaient grandes et les pressions très-faibles, la viscosité des enduits, négligeable dans tous les cas ordinaires, pourrait alors exercer une influence sensible.

Il faut remarquer qu'en général, et surtout pour les mé-

taux, l'eau pure est un mauvais enduit, et que parfois elle augmente plutôt qu'elle ne diminue le frottement.

236. *Adhérence des mortiers et enduits solidifiés.* — Mais lorsque le mortier a pris et que la dessiccation a atteint le degré convenable, il n'en est plus de même; l'adhésion, la cohésion, remplacent le frottement, et la résistance à la séparation devient sensiblement proportionnelle à l'étendue de la surface de contact et indépendante, au contraire, de la pression exercée, soit au moment de la pose, soit à celui de la séparation.

Pour les pierres calcaires scellées avec du mortier de chaux hydraulique de Metz, la résistance est d'environ 10307 kilogrammes par mètre carré de superficie. Avec d'autres chaux, sans doute grasses ou ordinaires, M. Boistard, ingénieur des ponts et chaussées, a trouvé 6960 kilogrammes. Avec du plâtre la résistance paraît encore suivre la même loi; mais elle varie considérablement avec l'instant de la prise du plâtre, qui paraît exercer une grande influence sur la cohésion.

237. *Observation sur l'introduction du frottement et de la cohésion dans les calculs sur la stabilité des constructions.* — Enfin on remarquera que le frottement ne peut, dans le cas des scellements en mortier ou en plâtre, se manifester qu'après que la cohésion ou l'adhérence a été vaincue, et que par conséquent ces deux résistances ne coexistent pas. Dans les calculs relatifs à la stabilité des constructions, on doit donc ne compter que sur l'une d'elles et sur la plus faible.

238. *Expériences sur le frottement pendant le choc.* — D'après les notions générales que nous avons exposées sur le mode d'action des forces, sur les efforts de compression, qui se développent pendant le choc, et la vérification que nous avons faite aux nos 66 et 67 des conséquences que l'on tire de ces notions, l'on serait certainement bien autorisé

donnant à la caisse descendante que le poids nécessaire pour vaincre le frottement et en suspendant sous cette caisse une bombe du poids de 50 kilogrammes, qui ne descendait que de $0^{m},50$, et cessait ensuite d'agir, ainsi qu'il a été expliqué au n° 97 du second Mémoire. Quant au mouvement accéléré, il se produisait toutes les fois que le poids moteur surpassait le frottement. La loi de ces mouvements était d'ailleurs déterminée, dans chaque cas, à l'aide des courbes tracées par le style de notre appareil chronométrique.

241. *Examen général de ce qui se passe dans les expériences.* — On voit aisément, d'après ce qui précède, ce qui se passait pendant les expériences; prenons en effet pour exemple un cas où le système du traîneau et de la bombe suspendue au-dessus de ce corps était animé d'un mouvement uniforme. A l'instant où la combustion de l'étoupille qui retenait les branches de la tenaille leur permettait de s'écarter, la bombe devenait libre et tombait en vertu de son poids; pendant qu'elle descendait et jusqu'au moment où elle atteignait le traîneau, celui-ci se trouvait déchargé du poids de la bombe et acquérait une quantité de mouvement précisément égale à celle que le frottement dû à ce poids aurait consommée. La vitesse horizontale du traîneau à l'instant où le choc commençait était donc un peu plus grande que celle de la bombe. Passé cette époque, les forces de compression développées par le choc produisaient un frottement variable comme elles à chaque instant, et qui consommait une certaine quantité de mouvement; de sorte que le traîneau, dont la marche s'accélérait pendant la chute de la bombe était ensuite retardé pendant l'acte du choc.

242. *Formules employées au calcul des expériences.* — Comme il s'agissait de vérifier si le frottement reste proportionnel aux pressions variables qui se produisent pendant la durée très-courte du phénomène, nous allons établir les

formules qui sont relatives à cette hypothèse, et nous les comparerons ensuite aux résultats de l'expérience. Considérons d'abord le cas d'un mouvement uniforme et appelons :

Q le poids du traîneau et de l'appareil de suspension de la bombe;

q le poids de la bombe qui produit le choc;

f le rapport du frottement à la pression pour les surfaces en contact;

h la hauteur de chute de la bombe au-dessus du traîneau,

U la vitesse due à cette hauteur;

T le temps de la chute;

V la vitesse horizontale du traîneau et de la bombe, à l'instant où celle-ci est lâchée par la tenaille;

V' la vitesse de ces corps après le choc;

$g = 9^{m},8088$.

Au moment où la bombe devient libre, la quantité de mouvement possédée par le système est

$$\frac{Q+q}{g}V.$$

Le poids de la bombe, quand elle est liée au traîneau; produit un frottement fq qui, dans chaque élément de temps t, consomme une quantité de mouvement $f.qt$, et qui, pendant la durée de la chute, en consommerait la quantité fqT.

Mais puisqu'au contraire la bombe cesse de presser sur le traîneau pendant ce temps, il s'ensuit que la quantité de mouvement gagnée par le système, par suite de cette diminution de pression pendant le temps T de la chute, est précisément fqT.

A l'instant où la bombe atteint le traîneau, la quantité de mouvement possédée par le système est donc

$$\frac{(Q+q)V}{g}+fqT.$$

A partir de cet instant et pendant toute la durée du choc, la bombe perd dans chaque élément de temps un élément de vitesse, et par suite une quantité de mouvement $\frac{q}{g}u$, d'où résulte une force de compression $\frac{q}{g}\times\frac{u}{t}$, produisant un frottement $\frac{fq}{g}.\frac{u}{t}$. Ce frottement consomme dans l'élément de temps une quantité de mouvement $\frac{fq}{g}.\frac{u}{t}$, et quand tout mouvement relatif dans le sens vertical est détruit, ce frottement, dû aux forces de compression, a finalement consommé une quantité de mouvement égale à $\frac{fq}{g}$U.

Par conséquent, lorsque le choc est terminé, on doit avoir entre les quantités de mouvement la relation

$$\frac{(Q+q)V}{g}+fqT-\frac{fqU}{g}=\frac{Q+q}{g}V',$$

ou

$$fqgT-fqU=(Q+q)(V'-V).$$

Or, la bombe, tombant d'un mouvement uniformément accéléré, en vertu de la pesanteur, on a évidemment $U=gT$, d'où il résulte que $V=V'$; c'est-à-dire que dans notre appareil la quantité de mouvement détruite par le frottement résultant des forces de compression doit être précisément égale à celle qu'il gagne pendant la chute de la bombe.

Ces deux effets sont successifs, mais ils se passent tous deux dans un intervalle de temps très-court, et ne doivent par conséquent occasionner dans la courbe du mouvement que des ondulations en sens contraires qui n'altèrent pas la loi générale, et qui doivent être à peine sensibles, soit dans la courbe minute, soit dans la courbe qui résulte du relèvement.

243. *L'accélération du mouvement du traîneau pendant la*

chute de la bombe peut être négligée. — Il est facile de s'assurer *à priori* que l'accélération de la vitesse du traîneau pendant la chute de la bombe était toujours très-faible dans nos expériences, quoique la hauteur de chute ait été portée jusqu'à $0^m,60$. On remarquera, en effet, qu'après ce que l'on a dit plus haut en nommant V_1 la vitesse horizontale du traîneau au moment où la bombe l'atteint, l'on aura

$$\frac{Q}{g}V + fqT = \frac{Q}{g}V_1,$$

d'où
$$V_1 - V = \frac{fqgT}{Q} = \frac{fqU}{Q}.$$

En y faisant, par exemple,

$$q = 50 \text{ kil.} \quad h = 0^m,60,$$

d'où $U = 4^m,21, \quad Q = 267^{kil},84, \quad f = 0,071,$

ce qui se rapporte à l'un des chocs les plus intenses que nous ayons produits dans nos expériences, on trouve

$$V_1 - V = 0^m,000295.$$

Or le choc de la bombe dans le sens horizontal n'ayant lieu qu'en vertu de cette différence de vitesse, on voit que son effet sur le mouvement général doit être tout à fait insensible, et qu'on peut, ainsi que nous l'avons fait dans le calcul précédent, en négliger l'influence sur le mouvement général du traîneau.

244. *Cas où le mouvement du traîneau est accéléré.* — Le raisonnement qui précède s'appliquerait de la même manière au cas où le système de la bombe et du traîneau serait animé d'un mouvement accéléré, et il en résulterait que si, comme nous l'avons admis, le frottement pendant le choc reste proportionnel à la pression, la loi générale du mouvement de notre appareil ne doit pas être troublée, ou, en d'autres termes, que si, avant la chute de la bombe, le mouvement était uniforme ou accéléré, suivant une certaine

loi, il le sera encore après le choc, suivant la même loi. La seule perturbation qui pourra en résulter sera manifestée parfois par des ondulations qui, dans la plupart des cas, devront être à peine sensibles.

La dureté ou la compressibilité du corps en contact ne devra d'ailleurs avoir aucune influence sur le résultat, et en faisant tomber la bombe sur les madriers de hêtre qui formaient le traîneau ou sur une masse de terre glaise molle posée sur ce traîneau, on devra, pour des circonstances égales d'ailleurs, trouver la même loi de mouvement, et cette loi de mouvement sera la même que s'il n'y avait pas eu de choc.

245. *Résultats des expériences.* — Il nous reste maintenant à comparer ces conséquences avec les résultats des expériences qui ont été exécutées, les unes quand le traîneau était animé d'un mouvement uniforme, les autres quand son mouvement était accéléré. Dans ces expériences, l'on a fait varier le poids des sphères choquantes depuis $11^{kil},99$ jusqu'à 50 kilogrammes, ou de 1 à 4 environ, le rapport du poids du corps choquant à celui du corps choqué de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{4}$, les hauteurs de chute de $0^m,10$ à $0^m,70$ ou de 1 à 7. L'on a produit le choc sur du bois et sur de la terre glaise, posés sur le traîneau. Si donc les lois que l'on a admises dans les formules précédentes sont vérifiées par l'expérience entre des limites étendues, on pourra, je pense, en conclure qu'elles subsistent pour les pressions développées pendant le choc, comme pour les autres.

Pour abréger, je ne rapporterai ici que les expériences faites dans le cas du mouvement uniforme, lorsque le choc avait lieu sur du bois et sur de la terre glaise. Les expériences faites avec des poids moteurs qui produisaient un mouvement accéléré ont conduit à des conséquences analogues : L'accélération produite ayant toujours été sensiblement la même dans les cas où il y avait un choc que dans ceux où il n'y en avait pas.

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur des madriers de hêtre pendant que le système glissait d'un mouvement uniforme.

POIDS du traîneau.	POIDS de la sphère.	PRESSION totale $Q + q$.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement uniforme.	FROTTEMENT. F.	RAPPORT du frottement à la pression f.	VITESSE du mouvement uniforme.	OBSERVATIONS.
kil.	kil.	kil.	m.	kil.	kil.		m.	
223,23	11,99	235,22	0,10	18,733	17,796	0,075	0,842	La bombe n'est pas tombée; il n'y a pas eu de choc.
223,23			0,10			0,075	0,800	
223,23			0,10			0,075	0,828	
223,23			0,30			0,075	0,806	
			0,30			0,075	0,818	
216,86	11,99	228,85	0,60	17,103	16,248	0,071	0,750	
	11,99	228,85	0,60	17,103	16,248	0,071	0,780	
	25,00	241,86	0,30	18,540	17,613	0,072	0,773	
	25,00	241,86	0,30	18,540	17,613	0,072	0,817	
	25,00	241,86	0,30	18,540	17,613	0,072	0,840	
	25,00	241,86	0,60	18,540	17,613	0,072	0,853	
	25,00	241,86	0,60	18,540	17,613	0,072	0,811	
	25,00	241,86	0,60	18,540	17,613	0,072	0,830	Il n'y a pas eu de choc.
	25,00	241,86	0,60	18,540	17,613	0,072	0,810	
	25,00	241,86	0,90	18,540	17,613	0,072	0,815	
	25,00	241,86	0,90	18,540	17,613	0,072	0,858	Il n'y a pas eu de choc.
	50,00	266,86	0,30	20,380	19,361	0,072	0,925	
	50,00	266,86	0,60	20,380	19,361	0,072	0,908	
	50,00	266,86	0,60	20,380	19,361	0,072	0,928	

Expériences sur le frottement de la fonte en mouvement sur la fonte, avec enduit de saindoux, pendant le choc.

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur une masse de terre glaise, pendant que cette masse et le traîneau glissent d'un mouvement uniforme commun.

POIDS du traîneau.	POIDS de la sphère.	PRESSION totale $Q+q$.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	POIDS MOTEUR pendant le mouvement uniforme.	FROTTEMENT. F.	RAPPORT du frottement à la pression f.	VITESSE du mouvement uniforme.	OBSERVATIONS.
kil.	kil.	kil.	m.	kil.	kil.		m.	
			0,30				0,863	
			0,30				0,837	
			»				0,740	Il n'y a pas eu de choc.
			»				0,750	
			0,60				0,755	
267,84	25,00	292,84	»	21,94	20,84	0,071	0,895	Il n'y a pas eu de choc.
			0,90				0,777	
			0,90				0,716	
			0,90				0,824	
			0,30				0,710	
			0,30				0,870	
267,84	50,000	317,84	0,60	23,75	22,56	0,071	0,816	
			»				0,870	Il n'y a pas eu de choc.

L'on voit par ces tableaux que la vitesse du mouvement uniforme a été la même dans les expériences où il n'y a pas eu de choc et dans celles où il y en a eu, et cela quelle qu'ait été la hauteur de la chute. Cette vitesse n'a dépendu dans tous les cas que de la charge ou pression totale du poids moteur et de l'état des surfaces.

L'examen des courbes du mouvement montre par les vibrations produites par le choc dans tout l'appareil et qui se faisaient sentir jusqu'au style, en quel endroit ce choc s'est produit, et soit qu'il ait eu lieu dans la période de la course où le mouvement était déjà devenu uniforme, ou dans celle où le mouvement était encore accéléré, la courbe minute et la courbe relevée offrent à peine quelques légères ondulations, et le mouvement reste ou devient uniforme à la même vitesse.

En résumé, ces expériences montrent que dans le choc les frottements dus aux pressions qui se développent sont encore proportionnels à ces pressions et indépendants de la vitesse.

246. *De la transmission du mouvement à l'aide de courroies.* — La théorie de la transmission du mouvement à l'aide de cordes ou courroies sans fin est fondée sur deux théorèmes. Le premier, dû à M. de Prony, relatif au glissement d'une corde ou d'une courroie sur la surface d'un cylindre ou d'un tambour; le second, dû à M. Poncelet, se rapporte à la variation de tension des deux brins des cordes ou courroies sans fin, employées dans ces transmissions. Je me suis proposé de vérifier par des expériences spéciales les conséquences de ces deux théorèmes et je vais faire connaître succinctement les résultats de ces recherches.

247. *Glissement des cordes ou courroies sur des cylindres.* — Exposons d'abord le premier de ces théorèmes, et considérons une corde ou courroie enveloppant une portion quelconque de la surface d'un cylindre, et sollicitée à une extrémité par une puissance P, et à l'autre par une résistance Q. Il

est clair que, pour produire le glissement de la corde, la puissance P devra être égale à la résistance Q, augmentée de la résistance opposée par le frottement de la corde à la surface du cylindre. Cherchons donc à déterminer ce frottement.

A cet effet, considérons deux éléments consécutifs *ab* et *bc* de la corde enroulée, et nommons :

T la tension de la corde dans l'élément *ab*.

T′ la tension de la corde dans l'élément *bc*.

Il est clair que la tension T′ surpasse la tension T d'une quantité infiniment petite *t*, qui est précisément la mesure de la résistance opposée par le frottement ; on a donc

$$T' = T + t,$$

et en passant d'un élément à l'autre, depuis le point *n* de contact de la direction *n*P, où T = P, jusqu'au point *m* de contact de la direction *m*Q, où T = Q, la somme de tous les accroissements de tension produits par le frottement au moment du glissement donnera la tension totale.

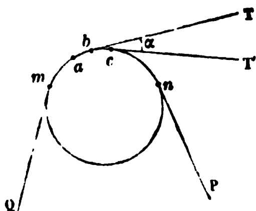


Fig. 79.

Le frottement ou l'accroissement élémentaire de tension *t*, de l'élément *ab* à l'élément *bc*, est produit par la pression qui résulte de la composante de la tension T′, normale à la surface, laquelle est T′ sin α, en nommant α l'angle infiniment petit de contingence des deux éléments *ab* et *bc*, ou simplement Tα, attendu que T diffère infiniment peu de T′, et sin α de α ; on a donc

$$t = f . T . \alpha = T f . \frac{S}{R},$$

f étant le rapport du frottement à la pression.

La somme de tous ces accroissements de tension, prise depuis le point *m*, où T = Q, jusqu'au point *n*, où T = P,

conduit, d'après les règles de l'analyse, qu'il n'y a pas lieu de présenter ici, à la formule

$$\log P = \log Q + 0{,}434 f \frac{S}{R}, \quad \text{ou} \quad P = Q \cdot 2{,}718^{f\frac{S}{R}}.$$

S étant la longueur totale de l'arc embrassé par la corde.

L'on voit par cette expression que la tension de la puissance motrice croît depuis $P = Q$, correspondant à $S = 0$, proportionnellement à l'ouverture de l'angle $\frac{S}{R}$, embrassé par la corde, et non à l'étendue absolue de cet arc; ce qui montre que, d'après les considérations théoriques, il importe peu d'augmenter le diamètre du cylindre pour accroître le frottement de glissement des cordes ou courroies, mais qu'il suffit de rendre plus grande la partie proportionnelle de leur circonférence qui est entourée.

La formule précédente est relative au cas où la puissance P doit entraîner la résistance Q, et par conséquent vaincre en outre le frottement de la corde ou de la courroie sur le tambour. Dans celui qui se présente fréquemment, et où la force P devrait céder à l'action de la force ou du poids Q, en modérant son action, ou y résister tout à fait, ainsi que cela arrive quand il s'agit de laisser descendre un fardeau, le frottement agit en faveur de la force P, et l'on a

$$\log P = \log Q - 0{,}434 f \cdot \frac{S}{R} \quad \text{ou} \quad P = \frac{Q}{2{,}718^{f\frac{S}{R}}}.$$

Telles sont les relations qu'indique la théorie, entre les forces P et Q, l'arc embrassé, le rayon du tambour et le coefficient f du frottement. Il nous reste à déterminer par l'expérience l'exactitude de ces relations.

248. *Expériences sur le glissement des cordes et des courroies à la surface des tambours en bois et des poulies en fonte.* — A cet effet, j'ai employé trois tambours en bois, des diamètres de $0^m{,}836$, $0^m{,}408$ et $0^m{,}100$, en les plaçant horizontalement

dans une position fixe, de manière qu'ils ne puissent pas tourner, et l'on passait dessus une courroie en cuir noir corroyé, à peu près neuve, mais ayant déjà acquis de la souplesse par un usage précédent. Sa largeur étant de $0^m,050$ sur une épaisseur de $0^m,0053$; sa roideur a paru d'ailleurs assez faible pour qu'il fût permis de la négliger par rapport au frottement de glissement sur la surface du tambour. Les deux brins de la courroie également répartis de chaque côté du tambour pendaient verticalement, et à chacun d'eux était attaché un plateau de balance destiné à recevoir des poids. La courroie pesait $2^{kil},295$, chaque plateau de balance $0^{kil},229$; par conséquent, le poids de chaque brin, de longueur égale, était avec son plateau de $1^{kil},376$. L'arc embrassé était égal à la demi-circonférence. L'on mettait d'abord dans chacun des plateaux des poids égaux, puis on ajoutait graduellement à l'un d'eux, et peu à peu, les poids nécessaires pour faire glisser la courroie sur le tambour.

L'on voit d'après cela que la tension Q du brin montant était égale à $1^{kil},376$, plus le poids contenu dans le plateau correspondant, et que la tension P du brin descendant était égale à Q, augmenté du poids ajouté, en sus de la charge primitive.

Cela posé, la formule précédente devient

$$\log P = \log Q + 0,434 f.\frac{S}{R}, = \log Q + 0,434 f \times 3,1416,$$

d'où l'on tire $f = \dfrac{\log P - \log . Q}{0,434 \times 3,1416} = \dfrac{\log P - \log Q}{1,363}$.

En introduisant dans cette formule les valeurs de P et de Q, fournies par l'expérience, on a pu calculer les différentes valeurs du rapport f du frottement à la pression et s'assurer ainsi qu'elles confirment les conséquences théoriques que nous venons de développer.

249. *Résultats d'expériences.* — Les deux tableaux suivants contiennent les résultats des expériences.

Expériences sur le frottement des courroies sur des tambours en bois.

LARGEUR de la courroie.	ÉTAT de la courroie.	DIAMÈTRE du tambour.	LONGUEUR développée de l'arc embrassé. S.	TENSION DU BRIN montant, Q.	TENSION DU BRIN descendant P.	RAPPORT du frottement à la pression, f.
m.		m.	m.	kil.	kil.	
0,050	Sèche, un peu onctueuse.	0,836	1,313	6,376	30,376	0,497
				6,376	29,376	0,486
				6,376	29,376	0,492
				16,376	75.876	0,488
				16,376	69,526	0,460
				16,376	68,676	0,458
				11,376	50,376	0,473
				11,376	43,376	0,426
					Moyenne......	0,472
0,050	Sèche, un peu onctueuse.	0,408	0,640	6,376	28,876	0,472
				6,376	31,376	0,458
				6,376	28.676	0,507
				16,376	63,876	0,479
				16,376	63,876	0,433
					Moyenne......	0,462
0,050	Sèche, un peu onctueuse.	0,100	0,157	6,376	33,376	0,526
				6,376	34,376	0,541
				11,376	41,376	0,411
				11,376	44,876	0,438
				11,376	42,876	0,422
				16,376	73,376	0,477
				16,376	76,436	0,490
					Moyenne......	0,472
0,028	Très-sèche et rude.	0,836	1,313	5,401	32,401	0,570
				5,401	32,901	0,575
				10,401	51,901	0,512
				10,401	47,401	0,483
				15,401	62,401	0,446
				15,401	61,901	0,443
					Moyenne......	0,504
					Moyenne générale......	0,477

Expériences sur le frottement des courroies en cuir corroyé sur des poulies en fonte.

LARGEUR de la courroie.	ÉTAT de la courroie.	DIAMÈTRE de la poulie.	LONGUEUR développée de l'arc embrassé, S.	TENSION DU BRIN montant, Q.	TENSION DU BRIN descendant, P.	RAPPORT du frottement à la pression, f.	OBSERVATIONS.
m.		m.	m.	kil.	kil.		
0,050	Sèche, un peu onctueuse.	0,610	0,958	6,376	13,476	0,"38	Cette courroie était vieille et avait servi longtemps dans une filature. La poulie n'était pas tournée.
				6,376	16,776	0,308	
				6,376	15,776	0,288	
				11,376	29,276	0,301	
				16,376	40,376	0,282	
				16,376	37,376	0,262	
				Moyenne.		0,279	
0,056	Sèche, un peu onctueuse.	0,610	0,958	6,376	16,000	0,300	Cette courroie était neuve. La poulie n'était pas tournée.
				11,376	27,876	0,285	
				11,376	25,876	0,271	
				16,376	36,376	0,254	
				16,376	36,376	0,254	
				26,376	72,876	0,323	
				Moyenne.		0,281	
0,050	Sèche, un peu onctueuse.	0,110	0,173	6,376	14,376	0,259	La poulie avait été tournée, et sa largeur n'était que de 0m,03, ce qui réduisait celle de la partie frottante de la courroie à 0m,03.
				6,376	18,376	0,336	
				11,376	26,876	0,273	
				11,376	30,876	0,318	
				16,376	36,876	0,259	
				16,376	36,876	0,259	
				Moyenne.		0,284	
0,050	Humide et mouillée d'eau.	0,610	0,958	11,376	30,876	0,317	
				6,376	19,876	0,361	
				6,376	19,876	0,361	
				16,376	51,876	0,366	
				16,376	57,376	[illegible]	

On voit par ces résultats d'expériences dans lesquelles l'arc embrassé a varié dans les rapports de 8,3 à 1 environ, et où les tensions ont atteint à peu près les limites de celles qu'on donne aux courroies de mécanique, que la valeur du rapport f du frottement à la pression est restée à très-peu près constante.

Les trois premières séries du premier tableau confirment pleinement les considérations théoriques. La quatrième série est relative à une courroie tout à fait neuve et très-roide, et c'est à cette circonstance que l'on peut attribuer l'accroissement assez faible de la valeur moyenne qu'elle a fournie. Cette courroie n'ayant d'ailleurs que $0^m,028$ de largeur, ou environ la moitié de la précédente, on voit que cette dernière série confirme, quant aux courroies, la loi de l'indépendance des surfaces.

Dans les expériences du deuxième tableau, l'étendue de l'arc embrassé a varié dans le rapport de 6 à 1, la largeur de courroie pressée sur la poulie dans celui de 2 à 1, les tensions dans ceux de 1 à 3 et de 1 à 6, et cependant la valeur du rapport f du frottement à la pression est restée sensiblement constante, et moyennement égale, pour la courroie sèche et les poulies sèches, à

$$f = 0,282.$$

Lorsque la poulie était mouillée d'eau, l'on a eu $f = 0,377$.

250. *Conclusions.* — En récapitulant les résultats de ces deux séries d'expériences sur le frottement des courroies sur des tambours en bois ou sur des poulies en fonte, on voit que l'on est autorisé à admettre que le rapport de cette résistance à la pression est :

1° Indépendant de la largeur de la courroie et de la longueur développée de l'arc embrassé ou du diamètre des tambours, ou, ce qui revient au même, indépendant de l'étendue de la surface de contact;

2° Proportionnel à l'angle sous-tendu par la courroie à la surface du tambour;

3° Proportionnel au logarithme du rapport des tensions des brins, et exprimé par la formule

$$f = \frac{\log\left(\frac{P}{Q}\right)}{1,363}.$$

251. ***Expériences sur la variation de tension des cordes ou courroies sans fin, employées à transmettre le mouvement.*** — Passons maintenant à la vérification expérimentale de la théorie donnée par M. Poncelet, pour la transmission du mouvement par des cordes ou des courroies sans fin, et disons d'abord en quoi elle consiste.

Lorsqu'une corde ou une courroie entoure deux poulies ou tambours entre lesquels elle doit établir une solidarité de mouvement, l'on a soin de lui donner une tension suffisante, que l'on détermine le plus ordinairement par tâtonnement, mais qu'il est cependant préférable de calculer comme on le verra plus loin. Cette tension *primitive* est à l'origine la même dans les deux brins, et cette égalité qui se rétablit au repos, n'est troublée que par l'influence du frottement des axes qui ont été mis en jeu, et qui, selon le sens dans lequel a lieu le mouvement, au moment de l'arrêt de la machine, agissent dans un sens ou dans l'autre.

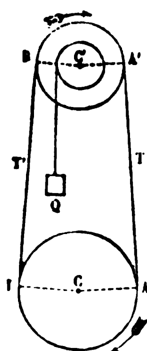


Fig. 80.

Cela dit, examinons comment le mouvement se transmet dans un pareil système; soient:

C le tambour moteur,

C′ le tambour conduit,

T_1 la tension primitive commune aux deux brins AA′ et BB′ de la courroie au moment où le tambour C commence à tourner et jusqu'à ce qu'il ait entraîné le tambour C′.

Le point A du contact primitif du brin AA′, marchant en s'éloignant du point A′ dans le sens de la flèche, le brin AA′

s'allonge, et sa tension augmente d'une quantité proportionnelle à cet allongement, suivant une loi générale vérifiée par les expériences sur la traction *. En même temps le point B de contact du brin BB' se rapproche de la même quantité du point B', de sorte que le brin BB' se raccourcit précisément d'une quantité égale à celle dont le brin AA' s'est allongé, et la tension de ce même brin BB' diminue en conséquence d'une quantité égale à celle dont la tension du brin AA' a augmenté. Si donc l'on appelle :

T la tension du brin conducteur AA' à un instant quelconque de la mise en mouvement.

T' la tension du brin conduit BB'.

t la quantité dont la tension primitive T_1 s'accroît dans le brin AA', et diminue dans le brin BB', on aura

$$T = T_1 + t, \quad \text{et} \quad T' = T_1 - t,$$

et par conséquent

$$T + T' = 2T_1,$$

ainsi à un instant quelconque la somme des deux tensions T et T' est constante et égale au double de la tension primitive.

Maintenant il est clair que par rapport au tambour conduit C', la puissance motrice est la tension T, et que la tension T' agit comme une résistance avec le même bras de levier, de sorte que le mouvement n'est produit et entretenu qu'à l'aide de l'excès $T - T'$ de la première sur la seconde de ces tensions.

Si la machine est, par exemple, destinée à soulever un fardeau Q agissant à la circonférence d'un treuil de rayon R', il est facile de voir, d'après la théorie des moments, qu'à un instant quelconque du mouvement uniforme de la machine, on devra avoir la relation

$$(T - T')R = QR' + fNr,$$

N étant la pression sur les tourillons, et r leur rayon.

---

* Voir les leçons sur la *Résistance des matériaux*.

Cette pression est d'ailleurs facile à déterminer, car en appelant

a l'angle formé par les directions AA' et BB' des courroies avec la ligne des centres CC',

M le poids du tambour,

on voit immédiatement que

$$N=\sqrt{\{M+Q+(T-T')\sin a\}^2+(T+T')^2\cos^2 a}\,.$$

expression qui, d'après le théorème d'algèbre de M. Poncelet, cité au n° 227 a pour valeur exacte à $\frac{1}{25}$ près, quand le premier terme sous le radical est plus grand que le second,

$$N=0{,}96\,\{M+Q+(T-T')\sin a\}+0{,}4\,(T+T')\cos a;$$

à l'aide de cette valeur de N qu'on introduirait dans la formule d'égalité des moments, l'on aurait une relation qui ne contiendrait que les valeurs de la résistance Q et des tensions. Mais comme elle serait un peu compliquée pour les applications, l'on peut remarquer que dans la plupart des cas, l'influence des tensions T et T' sur les frottements sera assez faible pour pouvoir être négligée, au moins dans une première approximation : on procédera donc ainsi qu'il suit :

On négligera d'abord l'influence des tensions sur les frottements et l'on aura simplement, dans le cas actuel,

$$N=M+Q$$

et par suite $\quad (T-T')R=QR'+f(M+Q)r$

d'où l'on tirera

$$T-T'=\frac{Q(R'+fr)+f.Mr}{R}=Q,$$

ce qui fournira une première valeur de la différence des tensions, qui est la puissance motrice de l'appareil.

Mais cela ne suffit pas pour connaître ces tensions, et il faut déterminer la tension primitive T, de telle façon que dans aucun cas la courroie ne puisse glisser.

D'après le théorème de M. de Prony, l'on a au moment du glissement entre la tension T et T' la relation

$$T = T' \times 2{,}718 + f\frac{S}{R}\, T' = KT'.$$

Le nombre K étant une quantité qui dépend uniquement de la nature et de l'état des surfaces en contact, ainsi que de l'angle $\frac{S}{R}$ embrassé par les courroies sur le tambour C'. Ces quantités sont connues et l'on peut dans chaque cas calculer la valeur de K par cette formule ou la prendre dans la table suivante qui correspond à presque tous les cas de la pratique.

RAPPORT de l'arc embrassé à la circonférence entière.	VALEUR DU RAPPORT *K*.					
	COURROIES neuves sur tambours en bois.	COURROIES A L'ÉTAT ORDINAIRE		COURROIES humides sur poulies en fonte.	CORDES SUR TAMBOURS OU TREUILS EN BOIS	
		sur tambours en bois.	sur poulies en fonte.		brut.	poli.
0,20	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,61
0,30	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,40	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,50	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,60	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,70	9,00	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,80	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,90	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,00	23,14	19,16	5,81	10,89	23,90	7,95
1,50	»	»	»	»	111,31	22,42
2,00	»	»	»	»	535,47	63,23
2,50	»	»	»	»	2574,80	178,52

A l'aide de ce tableau on aura donc la valeur de $T = KT'$ et par suite

$$T - T' = (K - 1)\, T' = Q,$$

Q représentant la plus grande valeur que la différence des tensions doive atteindre pour vaincre les résistances utiles et passives.

De cette relation on tirera la valeur de la plus petite tension qu'il soit permis de donner au brin conduit pendant la marche, pour que la courroie ne glisse pas; on aura ainsi

$$T' = \frac{Q}{K-1}.$$

on devra augmenter cette valeur de $\frac{1}{10}$ au moins pour se mettre à l'abri des circonstances accidentelles et tenir compte de l'influence négligée des tensions sur les frottements. Cela posé on aura

$$T = Q . \frac{Q}{K-1},$$

et par suite $$T = \frac{T+T'}{2} = \frac{1}{2}\frac{K+1}{K-1}Q.$$

Toutes les circonstances de la transmission du mouvement seront donc déterminées.

Si cependant l'on ne croyait pas pouvoir se contenter de ces premières valeurs T, T' et T_1, on pourrait en obtenir de plus rapprochées en introduisant celles-ci dans la valeur de la pression N, en déduire une nouvelle valeur plus exacte de Q_1 et s'en servir pour calculer de nouveau T', puis T et T_1.

252. *Expériences sur la variation des tensions des courroies sans fin employées à la transmission du mouvement.* — Pour vérifier par l'expérience l'exactitude de ces considérations, j'ai disposé verticalement au-dessus de l'axe d'une roue hydraulique qui ne fonctionnait pas et d'une poulie montée sur son arbre, un tambour cylindrique en chêne, de $0^m,836$ de diamètre, et dont l'axe était à 3 mètres de celui de la roue. Autour de ce tambour A'B' et de la poulie AB (fig. 81), l'on a fait passer une courroie, laquelle au lieu d'être d'une seule pièce, était en deux parties réunies vers chaque bout, par

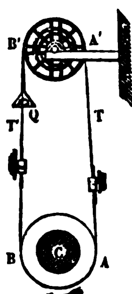


Fig. 81.

un dynamomètre à plateau et à style, de la force de 200 kil. On assurait d'ailleurs facilement ces dynamomètres à des positions telles que celui du brin descendant fût près du tambour supérieur, et celui du brin montant près du tambour inférieur, de sorte que la courroie pouvait se mouvoir sur une étendue de près de $2^m,00$, sans risquer que les instruments s'engageassent sur les tambours.

Un fil enroulé de plusieurs tours à la circonférence de l'une des gorges du plateau de chacun des dynamomètres et attaché par l'autre bout à un point fixe, obligeait ce plateau à tourner quand l'appareil marchait, et le papier, dont le plateau était recouvert, recevait ainsi la trace du style du dynamomètre.

La courroie étant passée sur les deux tambours, on faisait à volonté varier la tension des brins, dans un sens ou dans l'autre, en suspendant à la circonférence du tambour supérieur un plateau Q chargé de poids. Quant à la tension primitive, on l'augmentait en rapprochant les extrémités de la courroie ou en diminuant sa longueur avant l'expérience.

L'appareil étant ainsi disposé et préparé pour les observations, avant de charger le plateau Q, on traçait les courbes ou cercles de flexion de chacun des dynamomètres, afin d'avoir la tension des courroies au repos et d'obtenir par leur somme le double de la tension primitive T_1. On conçoit d'ailleurs que ces deux tensions ne pouvaient jamais être tout à fait égales; mais cela importait peu, puisqu'il ne s'agissait que d'avoir leur somme.

Cela posé, on chargeait le plateau d'un poids, qui, étant suspendu à la circonférence par une corde d'un diamètre égal à l'épaisseur de la courroie, avait par conséquent le même bras de levier que les tensions. Le brin opposé à ce poids se surtendait et le brin placé du même côté se détendait, et l'on traçait les nouvelles courbes de flexion du dynamomètre. On pouvait d'ailleurs, pour une même tension primitive, faire une suite d'expériences différentes,

jusques et y compris le poids moteur sous l'action duquel la courroie glisserait sur l'un ou l'autre tambour.

Expériences sur la variation de la tension des courroies sans fin employées à transmettre le mouvement à des poulies ou tambours.

NUMÉROS d'ordre des expé-riences.	POIDS suspendus à la circonfé-rence, Q.	TENSION DU BRIN		SOMME des tensions. T+T' = T.	OBSERVATIONS.
		montant ou tendu, T.	descendant ou détendu, T'.		
	kil.	kil.	kil.	kil.	
1	0,00	17,49	14,89	32,38	
2	20,23	27,24	5,82	32,86	
3	27,23	28,63	4,62	33,25	La courroie glisse.
4	0,00	29,41	26,03	55,44	
5	10,23	34,05	21,23	55,28	
6	20,23	38,82	16,44	55,26	Les dynamomètres ont marché d'un mètre environ.
7	30,23	44,42	10,96	55,38	
8	44,23	49,84	9 41	59,25	
9	0,00	33,43	28,26	61,69	
10	25,23	44,89	18,83	63,72	Id., id.
11	50,23	53,40	9,24	62,64	
12	0,00	30,34	26,27	56,71	
13	52,00	47,06	7,19	54,25	La courroie glisse.
14	0,00	48,76	44,85	93,61	
15	25,23	58,97	31,86	90,83	
16	50,23	71,20	21,57	92,77	
17	0,00	44,09	40,24	84,93	
18	50,23	69,96	18,49	88,45	
19	79,23	77,39	19,69	97,05	Id., id.
20	0,00	39,32	32,35	77,67	
21	40,23	61,14	20,03	81,17*	* Outre la charge Q, on avait suspendu à la circonférence moyenne des aubes de la roue, à $1^{m},85$ de l'axe, un poids de $10^{kil},229$ qui a rompu l'équilibre.

Dans ces expériences, on avait la facilité de laisser tourner les deux tambours, d'une certaine quantité, sous l'action des tensions, en sorte que l'on a pu réaliser les trois cas de la pratique, savoir : celui de la variation de tension avant que le mouvement soit produit, celui de cette variation pendant le mouvement, et enfin celui du glissement.

La courroie employée dans les expériences était très-souple, molle et peu susceptible de se polir en glissant.

En calculant le rapport du frottement à la pression pour cette courroie au moyen des expériences 3, 13 et 19, on trouve respectivement

$$f=0,578 \qquad f=0,596 \qquad f=0,544$$

dont la moyenne est $f=573$.

253. *Observations sur les résultats contenus dans le tableau précédent.* — L'on voit que la première ligne de chaque série d'expériences correspond au cas où le poids additionnel Q était nul, et où chaque brin prenait la tension primitive correspondant à l'éloignement des axes. Ces tensions ne sont pas toujours égales par suite de l'influence inévitable et déjà signalée des résistances passives mises en jeu, mais elles diffèrent peu l'une de l'autre. A mesure que le poids suspendu au tambour augmente, la tension de l'un des brins s'accroît et celle de l'autre diminue, mais de telle sorte que leur somme reste constante, ainsi que le montre la cinquième colonne du tableau.

Ces résultats, qui confirment complétement la théorie de M. Poncelet, étant d'ailleurs relatifs à des tensions dont la somme s'élève à 90 kil. et plus, et dont les plus grandes montent jusqu'à 77 kil., et les plus faibles descendent à moins de 5 kil., comprennent presque tous les cas de la pratique et montrent que cette théorie peut, avec sûreté, être appliquée au calcul des transmissions de mouvement par des courroies.

En terminant, nous ajouterons que l'on peut faire sup-

porter aux courroies destinées à un service continu une tension de $0^k,25$ par millimètre carré de section, ce qui permettra d'en déterminer la largeur d'après leur épaisseur.

254. *Frottement des tourillons.* — Outre les expériences qui ont été rapportées précédemment sur le frottement des surfaces planes, j'en ai exécuté un grand nombre sur celui des tourillons, au moyen d'un dynamomètre de rotation à plateau et à style qui a été le premier appareil de ce genre, mais qu'il serait inutile de décrire ici.

L'arbre de cet appareil dynamométrique était creux et en fonte. Il pouvait recevoir, par des portées exactement ajustées, des tourillons de rechange de différentes matières et de divers diamètres. Sa charge se composait de disques pleins en fonte pesant 150 kil. chacun, dont on pouvait augmenter le nombre de manière à atteindre des charges de plus de 1380 kil. Une poulie montée à frottement doux sur l'arbre, et qui lui transmettait le mouvement par l'intermédiaire d'un ressort, recevait par une courroie le mouvement d'une roue hydraulique, et la différence de tension des deux brins de la courroie était mesurée par le dynamomètre à style.

On a employé des tourillons de 0,050 à 0,100 de diamètre. Les vitesses ont varié dans le rapport de 1 à 4. Les pressions ont atteint 1880 kil., et, dans ces limites étendues, l'on a constaté que le frottement des tourillons était soumis aux mêmes lois que celui des surfaces planes.

Mais il convient de remarquer que, par l'effet de la forme même des corps frottants, dans le cas actuel, la pression s'exerce sur une étendue de surface d'autant plus petite que le tourillon a un diamètre moindre, et que les enduits sont plus facilement expulsés avec les petits tourillons qu'avec les gros. Cette circonstance a une grande influence sur l'intensité du frottement et sur la valeur de son rapport à la pression. L'action même du mouvement de rotation tend à expulser certains enduits et à rapprocher les surfaces de l'état simplement onctueux. L'ancien mode de graissage,

encore usité dans beaucoup de cas, consiste simplement à verser de l'huile ou à répandre du suif, du saindoux à la surface du corps frottant et à renouveler cette opération plusieurs fois par jour. On parvient ainsi, avec du soin, à empêcher les tourillons et leurs coussinets de s'user rapidement; mais l'enduit n'étant qu'imparfaitement renouvelé, le frottement atteint les 0,07, 0,08 et même 0,10 de la pression.

Si au contraire on emploie des appareils qui renouvellent sans cesse l'enduit, en quantité suffisante, sur les surfaces frottantes, elles se trouvent maintenues à un état parfait et constant de lubrification et le frottement s'abaisse aux 0,05, ou aux 0,03 de la pression et peut-être encore plus bas. Le poli des surfaces, opéré dans ces conditions favorables, devient de plus en plus parfait, et il ne serait pas étonnant que le frottement s'abaissât encore notablement au-dessous des limites indiquées ci-dessus.

Ces réflexions montrent de quelle utilité sont les appareils graisseurs pour diminuer le frottement qui, dans certaines machines ou usines à mécanismes compliqués, consomment une partie considérable du travail moteur. On ne saurait donc trop recommander l'emploi des appareils qui répartissent les enduits avec continuité sur les surfaces frottantes des machines, aussi ne doit-on pas s'étonner du grand nombre des dispositions qui ont été proposées dans ce but depuis quelques années. On aura toutefois soin de préférer celles qui ne dépensent l'huile que pendant le mouvement, à l'exclusion de quelques appareils, s'alimentant par la capillarité d'une mèche de substance filamenteuse, qui déversent constamment la substance destinée au graissage, même pendant les instants de repos de la machine, et qui la dépensent par conséquent en pure perte pendant ces intervalles.

255. *Résultats d'expériences.* — L'on trouvera dans le tableau suivant quelques-uns des résultats des expériences, à l'appui des considérations qui précèdent.

Expériences sur le frottement des tourillons en fonte sur des coussinets en fonte.

DIAMÈTRE des tourillons.	NATURE de l'enduit.	VITESSE DE LA CIRCONFÉRENCE en 1″.	POIDS DE L'ARBRE et de sa charge.	RAPPORT DU FROTTEMENT à la pression.	OBSERVATIONS.
m.		m.	kil.		
0,10	Huile.	0,060	1029	0,082	Dans ces expériences, l'huile se répandait seule à la surface des tourillons.
		0,068		0,082	
		0,149		0,082	
		0,136		0,079	
		0,104		0,079	
				0.081	
0,10	Huile.	0,065	1029	0,054	Dans ces expériences, l'huile était sans cesse répandue sur les surfaces frottantes.
		0,080		0,052	
		0,125		0,052	
		0,149		0,052	
	Moyenne......			0,053	
0,054	Huile.	0,131	1016,50	0,101	Dans ces expériences, l'huile avait été expulsée par la pression, et les surfaces étaient simplement très-onctueuses.
		0,125		0,109	
		0,142		0,101	
	Moyenne......			0,104	
0,054	Saindoux.	0,058	1016	0,070	Dans ces expériences, les surfaces s'alimentaient elles-mêmes de saindoux.
		0,082		0,069	
		0,100		0,075	
		0,120		0,084	
		0,136		0,070	
		0,142		0,060	
0,100	Saindoux.	0,068	1885	0,049	Dans ces expériences, l'enduit était renouvelé.
		0,101		0,050	
		0,116		0,052	
		0,125		0,040	
		0,131		0,042	
0,100	Saindoux.	tr.-lent.	1032	0,037	Dans ces expériences, l'enduit était continuellement renouvelé.
		0,046		0,039	
		0,073		0,025	
		0,098		0,026	
		0,098		0,035	
		0,116		0,026	
		0,150		0,832	

Les exemples contenus dans ce tableau suffisent pour montrer que le frottement des tourillons est en lui-même soumis aux mêmes lois que celui des surfaces planes; mais ils montrent aussi la grande influence que le renouvellement continuel de l'enduit peut exercer pour diminuer la valeur du rapport du frottement à la pression, qui descend quelquefois à 0,025.

L'on voit aussi que le diamètre des tourillons paraît avoir quelque influence sur la plus ou moins complète expulsion des enduits et, par suite, sur le frottement, de sorte que les dimensions à leur donner ne doivent pas être déterminées par la seule considération de leur résistance à la rupture.

En résumé, il ressort de l'ensemble des expériences que j'ai exécutées sur le frottement des tourillons, qu'il est à peu près le même pour les bois et les métaux frottant les uns sur les autres, et que son rapport à la pression peut, selon les cas, prendre les valeurs consignées au tableau suivant :

Valeurs du rapport du frottement à la pression pour les tourillons de diverses substances.

ÉTAT DES SURFACES.			
RODÉES au tripoli et parfaitement graissées. f.	CONTINUELLEMENT alimentées d'enduit. f.	GRAISSÉES de temps en temps. f.	ONCTUEUSES. f.
0,025 à 0,030	0,050	0,07 à 0,08	0,150

256. *Avantage des métaux grenus.* — Il n'est pas vrai, comme on le dit généralement, que le frottement soit toujours moindre entre les substances d'espèces différentes qu'entre les substances de même espèce. Mais il convient de préférer en général pour les parties frottantes les corps

grenus aux corps fibreux, et surtout de ne pas exposer ceux-ci à des frottements dans le sens des fibres, parce qu'alors il arrive que les fibres sont quelquefois enlevées, arrachées dans toute leur longueur. Sous ce rapport, la fonte fine, qui cristallise en grains arrondis, ainsi que l'acier fondu, sont des corps très-convenables pour faire des pièces soumises à de grands frottements. Aussi depuis quelques années emploie-t-on assez généralement pour les pistons des machines à vapeur des garnitures de fonte. Si pour les coussinets des arbres de rotation en fonte ou en fer on continue de se servir de bronze, c'est principalement parce qu'il est moins dur, qu'il s'use avant les arbres, et qu'il est plus facile de remplacer un coussinet qu'un arbre.

257. *Observation relative aux mécanismes très-légers.* — Dans les mécanismes très-légers, et surtout si leur mouvement est très-rapide, la viscosité des enduits peut quelquefois offrir une résistance comparable à celle que produirait le frottement proprement dit : aussi, dans des cas pareils, les résultats des expériences faites sous des pressions assez considérables par rapport à l'étendue des surfaces de contact, ne doivent-ils être appliqués qu'avec une extrême réserve.

258. *Usage des résultats de l'expérience.* — Les résultats obtenus dans les expériences de Metz sont résumés dans les trois tableaux suivants, qui donnent le rapport du frottement à la pression pour tous les corps employés dans les constructions. Le premier de ces tableaux est relatif aux surfaces planes qui ont été quelque temps en contact. Les valeurs qu'il donne pour le rapport f du frottement à la pression devront être employées toutes les fois qu'il s'agira de déterminer l'effort nécessaire pour produire le glissement de deux corps qui auront été quelque temps en contact : tel est le cas des manœuvres de vanne, et des autres appareils qui ne fonctionnent qu'à intervalles plus ou moins éloignés.

TABLEAU N° 1.

Frottement des surfaces planes lorsqu'elles ont été quelque temps en contact.

INDICATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression *f*.
Chêne sur chêne	parallèles	sans enduit	0,62
	id.	frottées de savon sec	0.44
	perpendiculaires	sans enduit	0,54
	id.	mouillées d'eau	0,71
	bois debout sur bois à plat	sans enduit	0,43
Chêne sur orme	parallèles	id.	0,38
Orme sur chêne	id.	id.	0,69
	id.	frottées de savon sec	0,41
	perpendiculaires	sans enduit	0,57
Frêne, sapin, hêtre, sorbier sur chêne	parallèles	id.	0,53
Cuir tanné sur chêne	le cuir à plat	id.	0,61
	le cuir de champ	id.	0,43
		mouillées d'eau	0,79
Cuir noir corroyé ou courroie sur surface plane en chêne	parallèles	sans enduit	0,74
Cuir noir corroyé ou courroie sur tambour en chêne	perpendiculaires	id.	0,47
Natte de chanvre sur chêne	parallèles	sans enduit	0,50
	id.	mouillées d'eau	0,87
Corde de chanvre sur chêne	parallèles	sans enduit	0,80
Fer sur chêne	parallèles	id.	0,62
	id.	mouillées d'eau	0,65
Fonte sur chêne	parallèles	id.	0,65
Cuivre jaune sur chêne	parallèles	sans enduit	0,62
Cuir de bœuf pour garniture de piston, sur fonte	à plat ou de champ	mouillées d'eau	0,62
		avec huile, suif ou saindoux	0,12
Cuir noir corroyé ou courroie sur poulie en fonte	à plat	sans enduit	0,28
		mouillées d'eau	0,38
Fonte sur fonte	id.	sans enduit	0,16†
Fer sur fonte	id.	id.	0,19

† Les surfaces conservant quelque onctuosité.

INDICATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression f.
Chêne, orme, charme, fer, fonte et bronze, glissant deux à deux, l'un sur l'autre	à plat...........	enduites de suif...	0,10 †
		enduites d'huile ou de saindoux.....	0,15 ‡
Pierre calcaire oolithique sur calcaire oolithique.	id.......	sans enduit.......	0,74
Pierre calcaire dure dite muschelkalk sur calcaire oolithique.	id.......	id........	0,75
Brique sur calcaire oolithique	id.	id.......	0,67
Chêne sur calcaire oolithique.	bois debout.....	id........	0,63
Fer sur calcaire oolithique....	id.	id........	0,49
Pierre calcaire dure ou muschelkalk sur muschelkalk.	id.......	id........	0,70
Pierre calcaire oolithique sur muschelkalk.	id.......	id.......	0,75
Brique sur muschelkalk.......	id.	id........	0,67
Fer sur muschelkalk.........	id.	id........	0,42
Chêne sur muschelkalk.......	id.	id........	0,64
Pierre calcaire oolithique sur calcaire oolithique.	id.......	avec enduit de mortier de trois parties de sable fin et une partie de chaux hydraulique.	0,74 ↓

† Lorsque le contact n'a pas duré assez longtemps pour exprimer l'enduit.
‡ Lorsque le contact a duré assez longtemps pour exprimer l'enduit et ramener les surfaces à l'état onctueux.
↓ Après un contact de 10 à 15'.

Le tableau n° 2 est relatif aux surfaces planes en mouvement les unes sur les autres; le tableau n° 3 s'applique aux tourillons en mouvement sur leurs coussinets. Les valeurs que donnent ces tableaux ne doivent être employées que pour calculer le frottement de deux surfaces en mouvement l'une sur l'autre, après la période dans laquelle le coefficient de frottement au départ a dû être introduit.

TABLEAU N° 2.

Frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.

INDICATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression f.
Chêne sur chêne	parallèles	sans enduit	0,48
	id.	frottées de savon sec	0,16
	perpendiculaires	sans enduit	0,34
	id.	mouillées d'eau	0,25
	bois debout sur bois plat	sans enduit	0,19
Orme sur chêne	parallèles	id.	0,43
	perpendiculaires	id.	0,45
	parallèles	id.	0,25
Frêne, sapin, hêtre, poirier sauvage et sorbier, sur chêne.	id.	id.	0,36 à 0,40
Fer sur chêne	id.	id.	0,62
		mouillées d'eau	0,26
		frottées de savon sec	0,21
Fonte sur chêne	id.	sans enduit	0,49
		mouillées d'eau	0,22
		frottées de savon sec	0,19
Cuivre jaune sur chêne	id.	sans enduit	0,62
Fer sur orme	id.	id.	0,25
Fonte sur orme	id.	id.	0,20
Cuir noir corroyé sur chêne	id.	id.	0,27
Cuir tanné sur chêne	à plat ou de champ	id.	0,30 à 0,35
		mouillées d'eau	0,29
Cuir tanné sur fonte et sur bronze.	à plat ou de champ	sans enduit	0,56
		mouillées d'eau	0,36
		onctueuses et mouillées d'eau	0,23
		enduites d'huile	0,15
Chanvre en brin ou en corde sur chêne.	parallèles	sans enduit	0,52
	perpendiculaires	mouillées d'eau	0,33
Chêne et orme sur fonte	parallèles	sans enduit	0,38
Poirier sauvage sur fonte	id.	id.	0,44

INDICATION des surfaces en contact.	DISPOSITION des fibres.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression f.
Fer sur fer	parallèles	sans enduit	» †
Fer sur fonte et sur bronze	id.	id.	0,18 ‡
Fonte sur fonte et sur bronze.	»	id	0,15 ‡
Fonte sur fonte.	»	mouillées d'eau	0,31
Bronze sur bronze	»	sans enduit	0,20
Bronze sur fonte	»	id.	0,22
Bronze sur fer	»	id.	0,16 ↓
Chêne, orme, charme, poirier sauvage, fonte, fer, acier et bronze, glissant l'un sur l'autre ou sur eux-mêmes.	»	lubrifiées à la manière ordinaire avec enduit de suif, saindoux, cambouis mou, etc.	0,07 à 0,08 ¶
		légèrement onctueuses au toucher	0,15
Pierre calcaire oolithique sur calcaire oolithique.	»	sans enduit	0,64
Pierre calcaire dite muschelkalk sur calcaire oolithique.	»	id.	0,67
Brique ordinaire sur calcaire oolithique.	»	id.	0,65
Chêne sur calcaire oolithique.	bois debout	id.	0,38
Fer forgé sur calcaire oolithique.	parallèles	id.	0,69
Pierre calcaire dite muschelkalk sur muschelkalk.	»	id.	0,38
Pierre calcaire oolithique sur muschelkalk.	»	id.	0,65
Brique ordinaire sur muschelkalk.	»	id.	0,60
Chêne sur muschelkalk	bois debout	id.	0,38
Fer sur muschelkalk	parallèles	id.	0,24
	id.	mouillées d'eau	0,30

† Les surfaces se rodent dès qu'il n'y a pas d'enduit.
‡ Les surfaces conservant encore un peu d'onctuosité.
↓ Les surfaces étant un peu onctueuses.
¶ Lorsque l'enduit est sans cesse renouvelé et uniformément réparti, ce rapport peut s'abaisser jusqu'à 0,05.

TABLEAU N° 3.

Frottement des tourillons en mouvement sur leurs coussinets.

INDICATION des surfaces en contact.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression lorsque l'enduit est renouvelé à la manière ordinaire.	d'une manière continue.
Tourillons en fonte sur coussinets en fonte.	enduites d'huile d'olive, de saindoux, de suif ou de cambouis mou...........	0,07 à 0,08	0,030 à 0,054
	avec les mêmes enduits et mouillées d'eau..........	0,08	»
	enduites d'asphalte........	0,054	»
	onctueuses................	0,14	»
	onctueuses et mouillées d'eau....................	0,14	»
Tourillons en fonte sur coussinets en bronze.	enduites d'huile d'olive, de saindoux, de suif ou de cambouis mou...........	0,07 à 0,08	0,030 à 0,054
	onctueuses...	0,16	»
	onctueuses et mouillées d'eau....................	0,16	»
	très-peu onctueuses.......	0,19	» †
Tourillons en fonte sur coussinets en bois de gayac.	sans enduit...............	0,18	» ‡
	enduites d'huile ou de saindoux....................	»	0,090
	onctueuses d'huile ou de saindoux................	0,10	»
	onctueuses d'un mélange de saindoux et de plombagine..................	0,14	»
Tourillons en fer sur coussinets en fonte.	enduites d'huile d'olive, de suif, de saindoux ou de cambouis mou...........	0,07 à 0,08	0.30 à 0,054
Tourillons en fer sur coussinets en bronze.	enduites d'huile d'olive, de saindoux ou de suif......	0,07 à 0,08	0,030 à 0,054
	enduites de cambouis ferme.	0,09	»
	onctueuses et mouillées d'eau....................	0,19	»
	très-peu onctueuses........	0,25	» ↓

† Les surfaces commençant à se roder.
‡ Les bois étant un peu onctueux.
↓ Les surfaces commençant à se roder.

INDICATION des surfaces en contact.	ÉTAT des surfaces.	RAPPORT du frottement à la pression lorsque l'enduit est renouvelé à la manière ordinaire.	d'une manière continue.
Tourillons en fer sur coussinets en gayac.	enduites d'huile ou de saindoux	0,11	»
	onctueuses	0,19	»
Tourillons en bronze sur coussinets en bronze.	enduites d'huile	0,10	»
	enduites de saindoux	0,09	»
Tourillons en bronze sur coussinets en fonte	enduites d'huile ou de suif	»	0,030 à 0,052
Tourillons en gayac sur coussinets en fonte.	enduites de saindoux	0,12	»
	onctueuses	0,15	»
Tourillons en gayac sur coussinets en gayac.	enduites de saindoux	»	0,07

259. *Application aux vannes.* — Soit L la largeur horizontale d'une vanne soumise à une certaine charge d'eau, et H′ la charge ou la hauteur du niveau au-dessus d'une tranche horizontale d'une épaisseur h' infiniment petite, de cette vanne. La surface pressée de cet élément sera Lh' et la pression qu'il éprouvera sera 1000.L.h'.H′. La pression totale sur la surface entière de la vanne étant égale à la somme de toutes les pressions semblables sur chacun des éléments, elle aura pour valeur

$$1000\,L\,[H'h' + H''h'' + H'''h''' + \text{etc.}].$$

Or les produits LH′h', LH″h'', etc., sont les moments des surfaces élémentaires Lh', Lh'', etc., par rapport au plan du niveau, et leur somme est égale au moment de la surface totale égale à LE.H, en nommant E la hauteur pressée de la vanne, et H la distance de son centre de gravité à la sur-

face du niveau ou la charge sur son centre de figure. Donc cette pression totale est

$$1000\,LEH,$$

et le frottement qui en résulte contre les coulisses de cette vanne est

$$1000.f.LEH,$$

f étant le rapport du frottement à la pression pour les surfaces en contact, rapport dont on devra prendre la valeur dans le premier tableau s'il s'agit de calculer l'effort à exercer pour mettre la vanne en mouvement.

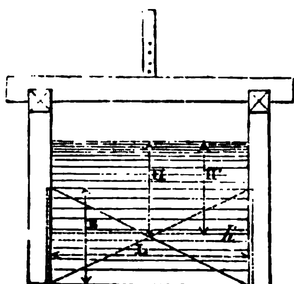


Fig. 82.

EXEMPLE : Si $L = 2^m,00$, $E = 0^m,35$, $H = 1^m,50$, le premier tableau donne pour une vanne en bois de chêne glissant à fibres croisées sur du bois de chêne mouillé d'eau $f = 0,71$; on a donc pour le frottement

$$1000 \times 0,71 \times 2^m,00 \times 0^m,35 \times 1^m,50 = 741 \text{ kil.}$$

Cet effort doit être transmis dans le sens des crémaillères fixées à la vanne, et comme il est considérable, il faudrait disposer un appareil du genre des crics, convenablement proportionné, pour l'établissement duquel il faudrait prendre, pour l'effort qu'un homme peut exercer à la manivelle pendant un moment, 25 à 30 kilogrammes au plus, et pendant le mouvement environ 10 à 12 kilogrammes.

Lorsque la vanne est en mouvement, l'effort à transmettre aux crémaillères est beaucoup moindre, parce que le rapport du frottement à la pression, diminue et se réduit pour les vannes et coulisses en bois mouillées à 0,25, ce qui donne pour le frottement pendant le mouvement

$$1000 \times 0,25\,L.EH = 1000 \times 0,25 \times 2^m,00 \times 0^m,35 \times 1^m,50 = 131^{kil},25$$

iers instants, et une valeur décroissante à me- la vanne s'élevant, la charge H sur son centre diminue.

Il est sans doute inutile de dire que la manœuvre de vanne doit être calculée pour l'effort maximum.

260. *Application aux châssis de scie.* — S'il s'agit, par exemple, d'un châssis de scierie à placage, soumis à une pression de 50 kilogrammes et garni de bandes de fer glissant dans des coulisses en bronze, graissées avec du saindoux, on a, si les surfaces sont bien graissées, pour le frottement :

$$0{,}07 \times 50 = 3^{\text{kil}}{,}50;$$

et si elles sont onctueuses :

$$0{,}15 \times 50 = 7^{\text{kil}}{,}50.$$

Si la course du châssis est de $1^{\text{m}}{,}20$ et le nombre de coups de 180 en 1', le chemin parcouru en 1" sera de $3^{\text{m}}{,}60$ pour chaque course et le travail consommé par le frottement du châssis en 1" sera dans le premier cas :

$$2 \times 3^{\text{m}}{,}60 \times 3^{\text{kil}}{,}50 = 12^{\text{kil}}{,}60 = \frac{1}{6} \text{ de cheval};$$

dans le second cas :

$$203{,}60 \times 7{,}50 = 27{,}00 = \frac{1}{3} \text{ de cheval}.$$

261. *Application aux tourillons.* — Pour calculer le travail consommé par le frottement des tourillons d'un axe de rotation on commence par chercher la résultante des forces qui agissent autour de cet axe, et pour cela, s'il le faut, on décompose toutes ces forces en deux : l'une horizontale, l'autre verticale ; et l'on prend séparément la résultante de chacun de ces groupes. Nommant X la somme des composantes horizontales, Y la somme des composantes verticales, la résultante générale sera

$$\sqrt{X^2+Y^2},$$

et le frottement qu'elle produira sera

$$f.\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Le théorème de M. Poncelet déjà cité au n° 227 nous apprend que, quand l'on ne connaît pas l'ordre de grandeur de X et de Y, on peut calculer à $\frac{1}{6}$ près la valeur du radical par la formule $0,83(X+Y)$, et que, si l'on sait d'avance que l'un des termes, X, par exemple, est plus grand que l'autre, ce qui arrive le plus souvent, on aura la valeur du radical à $\frac{1}{25}$ près par l'expression $0,96X+0,4Y$.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une roue hydraulique à augets pesant 40 000 kilogrammes, transmettant un effet utile de 50 chevaux à sa circonférence extérieure et communiquant le mouvement à un pignon, de façon que la résistance utile soit horizontale et représentée par Q. Supposons enfin que le rayon de la roue soit $R=3^m,00$, la vitesse à sa circonférence de $1^m.60$, et le rayon R′ de la roue d'engrenage égal à $2^m,00$. L'effort P transmis à la circonférence de la roue sera d'abord

$$P=\frac{50\times 75}{1,60}=2343^{kil},75.$$

La pression sur les tourillons de la roue hydraulique sera

$$\sqrt{(M+P)^2+Q^2},$$

ou, attendu que $M=40\,000^{kil}$, et que par conséquent $M+P$ est plus grand que Q, on pourra prendre pour valeur approchée du radical à $\frac{1}{25}$ près

$$0,96(M+P)+0,4Q.$$

Pour le mouvement uniforme, il faut que le moment de la puissance P soit égal à la somme des moments des ré-

DE LA ROIDEUR DES CORDES.

263. *De la roideur des cordes.*—Lorsqu'une corde, sollicitée à son extrémité par un poids ou un effort de tension, s'enroule sur un cylindre ou sur une poulie, mobile autour de son axe, elle éprouve à se plier une difficulté causée par sa roideur, et la courbure qu'elle affecte est d'un rayon plus grand que celui du cylindre, de sorte que la direction du brin prolongé passe à une distance de l'axe plus grande que le rayon du rouleau augmenté de celui de la corde. De là résulte que le moment de la tension de ce brin est augmenté d'une certaine quantité provenant de la résistance de la corde à la flexion.

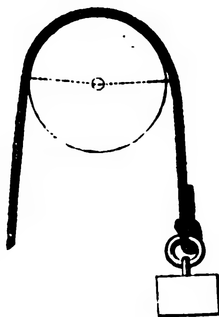


Fig. 83.

Cette résistance, connue sous le nom de roideur des cordes, a été étudiée expérimentalement par Amontons, et plus tard par Coulomb, qui s'est servi de l'appareil imaginé par son prédécesseur et d'un autre dispositif analogue à celui que nous avons décrit au n° **223**, et qui lui a servi pour ses expériences sur le roulement. Nous donnerons donc une idée suffisamment exacte de ces recherches en nous occupant seulement de celles de Coulomb, qui bien qu'incomplètes, sont encore ce que nous possédons de mieux sur cette matière.

264. *Expériences de Coulomb avec l'appareil d'Amontons.* —Dans cet appareil, un rouleau libre LM est enveloppé d'un tour de chacun des deux brins du cordage mis en ex-

périence, et qui passe sur deux poulies A et B fixées à une poutre. Aux extrémités C et D de ce cordage sont deux crochets soutenant un plateau chargé de poids. Le rouleau est placé horizontalement, et le tour de chacun des brins qui

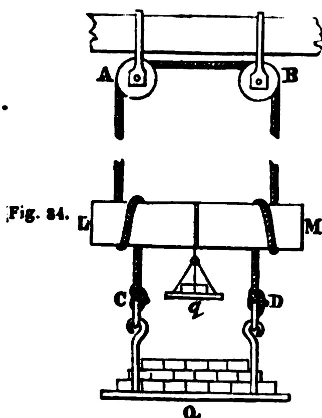


Fig. 84.

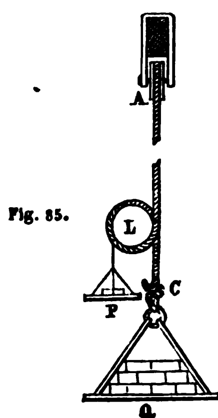


Fig. 85.

l'enveloppent est disposé symétriquement par rapport à l'autre. Au milieu de l'intervalle de ces tours une ficelle flexible entoure le rouleau, auquel elle est fixée par un bout, tandis qu'elle supporte à l'autre un petit plateau, dans lequel on met le poids q nécessaire pour faire lentement descendre le rouleau.

Dans ce mouvement, la partie inférieure de chaque brin du cordage s'enroule sur le rouleau, et la partie supérieure se déroule. La tension de chaque brin est égale à la moitié $\frac{Q}{2}$ de la charge du plateau. De plus, il est facile de voir que, la rotation instantanée du rouleau ayant lieu autour du point de contact, le chemin parcouru par le poids moteur q sera double du chemin parcouru par les parties enroulées de la corde. En effet, quand le rouleau sera descendu du point de contact a au point b (fig. 86), il est évident que l'arc de corde enroulé ou le chemin parcouru dans le sens de la résistance à l'enroulement sera ab. Or il est clair que dans

ce déplacement le point de la ficelle de suspension du poids moteur q, qui sera venu dans la verticale ou au contact, sera un point d placé à une distance cd égale à l'arc $cd' = \text{arc } ab' = ab$, dont le rouleau aura marché. Donc le poids sera descendu de ab par le transport du rouleau, et de $cd' = ab$ par son roulement, ou enfin de $2.ab$ en tout.



Fig. 86.

Le travail développé par ce poids sera $q \times 2ab = q.\mathrm{D}\alpha_1$, en appelant D le diamètre moyen du rouleau et α_1 l'angle décrit à l'unité de distance, tandis que le travail développé par la roideur R_1 de chaque brin sera égale à cette roideur même multipliée par le chemin parcouru, ou à

$$\mathrm{R}_1 \times ab = \mathrm{R}_1 \frac{\mathrm{D}}{2}.\alpha_1.$$

On aura donc au moment où l'équilibre aura lieu, ou quand le mouvement sera très-lent et à peu près uniforme, et à cause de la résistance des deux brins :

$$q.\mathrm{D} = 2.\mathrm{R}_1 \frac{\mathrm{D}}{2}; \quad \text{d'où } q = \mathrm{R}_1.$$

c'est-à-dire que le poids moteur est égal à la résistance que chacun des deux brins oppose à l'enroulement.

265. *Résultats des expériences de Coulomb.* — Avant d'aller plus loin, nous rapporterons dans le tableau suivant les données et les résultats des expériences que Coulomb a exécutées avec l'appareil d'Amontons, en nous bornant à transformer les anciennes mesures en nouvelles.

Les cordes de 6 fils, de 15 fils et de 30 fils qu'il a employées ont été enroulées sur des rouleaux de 1 pouce, 2 pouces et 4 pouces de diamètre, et les tensions totales ont varié de 25 à 1000 livres, les poids moteurs variant aussi dans des limites assez étendues.

Résultats des expériences de Coulomb sur la roideur des cordes, faites avec l'appareil d'Amontons.

CHARGES OU TENSIONS totales des deux brins, Q.	Valeurs du poids moteur, trouvées pour les cordes des diamètres de :								
	$d = 0^m,0088$ ou de 6 fils, enroulées sur des rouleaux de diamètres D égaux à			$d = 0^m,0144$ ou de 15 fils, enroulées sur des rouleaux de diamètres D égaux à			$d = 0^m,0200$ ou de 30 fils, enroulées sur des rouleaux de diamètres D égaux à		
	$0^m,027$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,027$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,162$
kil.	kil.	kil	kil.	kil.	kil.	kil.	kil.	kil.	kil.
12,24	0,979	»	»	3,427	1,566	0,832	5,385	2,448	»
61,19	5,385	1,958	»	10,769	4,406	2,447	10,280	4,161	»
110,14	8,322	3,182	»	14,085	8,322	3.427	14,196	6,853	»
208,04	15,175	5,874	2,790	31.818	15.175	6,364	23,007	11,259	»
305,94	21.049	15,175	4.406	45,035	20,070	9,175	32,797	15,175	»
501,74	»	21,049	5,385	»	»	13,217	»	24,475	16,643

Coulomb a conclu de ses expériences que, pour la même corde, la résistance à l'enroulement variait en raison inverse du diamètre du rouleau, d'où il suit que le produit de cette résistance ou du poids moteur qui lui fait équilibre par le diamètre du rouleau doit être une quantité constante, quelle que soit la grandeur du rouleau sur lequel la corde est enroulée. Cherchons si cette conséquence est suffisamment justifiée, et à cet effet, faisons le produit des diamètres des rouleaux par les valeurs obtenues pour le poids moteur q, pour chaque corde et chaque tension employées; nous obtiendrons ainsi les résultats consignés dans le tableau suivant, qui, dans le cas où les conséquences de Coulomb pourraient être admises, représenteraient les résistances à l'enroulement sur un cylindre de $1^m,00$ de diamètre.

CHARGES OU TENSIONS totales des deux brins Q.	Valeurs du produit qD pour les cordes des diamètres de								
	$d = 0^m,0088$ ou de 6 fils, enroulées sur des rouleaux des diamètres D égaux à			$d = 0^m,0144$ ou de 15 fils, enroulées sur des rouleaux des diamètres D égaux à			$d = 0^m,0200$ ou de 30 fils, enroulées sur des rouleaux des diamètres D égaux à		
	$0^m,027$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,027$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,054$	$0^m,108$	$0^m,162$
kil. 12,24	0,0264	»	»	0,0925	0,0645	0,0898	0,2900	0,2645	»
61,19	0,1450	0,1060	»	0,2910	0,2380	0,2645	0,5550	0,4490	»
110,14	0,2245	0,1720	»	0,3800	0,4490	0,3700	0,7650	0,7400	»
206,04	0,4080	0,3170	0,3010	0,8600	0,8190	0,6960	1,2400	1,2150	»
305,94	0,5680	0,3960	0,4750	1,2110	1,1200	0,9900	1,7700	1,6400	»
501,74	»	»	0,5810	»	»	1,3600	»	2,6400	2,0950

L'examen de ce tableau montre que pour la corde de $0^m,02$ de diamètre, les valeurs du produit qD sont à peu près égales pour tous les diamètres des rouleaux employés; qu'il en est à peu près de même pour la plupart des résultats fournis par la corde de $0^m,0144$; mais que ceux qui sont relatifs à la corde de $0^m,0088$ sont beaucoup moins d'accord avec la loi admise par Coulomb.

Cependant, comme il s'agit en général, dans les applications, de cordes de diamètres supérieurs à $0^m,0088$, nous admettrons, avec ce physicien, jusqu'à plus ample information, que la résistance à l'enroulement varie en raison inverse du diamètre du cylindre.

266. *Expression générale de la résistance à l'enroulement.* — Coulomb a tiré de ses expériences la conclusion que la résistance à l'enroulement pouvait être représentée par une expression composée de deux termes, l'un constant pour chaque corde et chaque rouleau, que nous désignerons par

la lettre A, et que ce physicien a nommé la roideur naturelle, parce qu'il dépend du mode de fabrication de la corde, et du degré de torsion de ses fils et de ses torons; l'autre proportionnel à la tension T du brin qui s'enroule, et que l'on exprime par le produit BT, dans lequel B est aussi un nombre constant pour chaque corde et chaque rouleau.

Dans le cas de l'appareil d'Amontons on a $T=\frac{Q}{2}$, et la formule de Coulomb donne

$$q=R_1=A+B\frac{Q}{2}.$$

Ainsi, quand les valeurs du poids moteur q, correspondant à chacune des valeurs Q du poids total du plateau, sont données par l'expérience, si l'on prend les poids totaux Q du plateau pour abscisses et les valeurs de q pour ordonnées d'une ligne que l'on tracerait en joignant tous les points ainsi obtenus, cette ligne sera une ligne droite dont la position et l'inclinaison fourniront les valeurs de A et de $\frac{B}{2}$ pour chaque corde et chaque rouleau.

M. Navier, dans la discussion des expériences de Coulomb, qu'il a donnée dans la seconde édition de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*, a attribué aux constantes A et B des valeurs particulières pour les cordes des différents diamètres employés, et qui sont respectivement les suivantes :

DIAMÈTRE des cordes, d.	VALEURS DES COEFFICIENTS	
	A.	B.
$0^m,0200$	0,222460	0,009738
$0^m,0144$	0,063514	0,005518
$0^m,0088$	0,010604	0,002380

Mais, pour comparer la formule donnée par M. Navier aux résultats des expériences, on ne devra introduire dans cette formule $R = A + BT$ que les valeurs de $T = \frac{Q}{2}$ pour en déduire les poids q, qui auraient dû être trouvés avec l'appareil d'Amontons. C'est ainsi que l'on a fait cette comparaison dans les figures de la planche V en prenant pour la représentation graphique des résultats de l'expérience les abscisses égales aux charges totales et les ordonnées égales aux valeurs de qD ou aux résistances à l'enroulement sur un cylindre d'un mètre de diamètre. Puis, pour comparer ces résultats aux valeurs déduites des coefficients de M. Navier, on a pris, pour les mêmes abscisses, des ordonnées égales aux valeurs de $A + \frac{B}{2}.Q$, déduites des valeurs de A et de B qui sont données d'après lui dans le tableau précédent.

L'examen de la figure 3 montre que les valeurs de A et de B adoptées par M. Navier s'accordent très-bien avec les résultats de l'observation pour la corde de $0^m,0200$, la droite tracée d'après les valeurs de ses coefficients s'éloignant très-peu de tous les points obtenus graphiquement à l'aide des chiffres directement déduits de l'expérience; mais pour les cordes de $0^m,0144$ et de $0^m,0088$ les valeurs adoptées par cet ingénieur sont trop faibles, surtout quant au nombre B, les points correspondant aux chiffres du tableau dans les figures 1 et 2, relatives aux cordes de 0,0088 et de 0,144, étant tous situés au-dessus de la ligne droite qui représente la formule. Les chiffres de M. Navier paraissent avoir été déterminés seulement à l'aide de la dernière série des expériences faites sur chaque corde, et avec la valeur de q obtenue pour la plus grande charge.

267. *Autres expériences de Coulomb.* — Coulomb a fait encore, par un moyen différent, d'autres expériences sur la roideur des cordes et leur résistance à l'enroulement; à cet effet il posait des rouleaux de différents diamètres sur

le banc horizontal qu'il avait précédemment employé à ses expériences sur le frottement, et chargeait ces rouleaux de poids égaux suspendus aux deux brins de la corde en expérience. Une ficelle très-flexible dont il négligeait la roideur servait à suspendre les poids moteurs capables de produire ou d'entretenir un mouvement très-lent. Des expériences préalables lui ayant permis d'apprécier la résistance due au roulement des rouleaux, il a pu la défalquer et obtenir celle qui provenait de la roideur des cordes. Les résultats de ces expériences sont rapportés dans le tableau suivant et traduits en mesures métriques.

Expériences sur la roideur des cordes faites par Coulomb avec des rouleaux mobiles sur un plan horizontal.

CHARGES ou tensions Q.	Valeurs de la résistance à l'enroulement pour des cordes des diamètres de			
	$d = 0^m,2000$ enroulées sur des rouleaux de diamètres D égaux à		$d = 0^m,0144$, enroulées sur un rouleau de $0^m,162$.	$d = 0^m,0088$, enroulées sur un rouleau de $0^m,162$.
	$4^m,325$	$0^m,162$		
kil.	kil.	kil.	kil.	kil.
12,24	»	»	0,558	»
48,95	1,713	»	2,185	»
97,90	»	6,462	4,014	1,615
146,85	5,384	»	»	»
244,75	7,049	»	8,565	»

En admettant encore avec Coulomb, d'après les résultats des précédentes expériences, que la résistances à l'enroulement varie en raison inverse du diamètre des rouleaux, nous aurons la résistance pour un rouleau d'un mètre de diamètre, en multipliant respectivement chacune de celles

qui sont consignées dans ce tableau par le diamètre du rouleau correspondant. C'est ce que l'on a fait pour former le tableau suivant, dans lequel on a aussi inséré les valeurs de la même résistance calculée à l'aide des valeurs de A et de B admises par M. Navier, afin de reconnaître si la formule $R = A + BQ$, représente effectivement les résultats des expériences.

CHARGES ou tensions Q.	Résistances à l'enroulement sur un tambour d'un mètre de diamètre pour des cordes des diamètres de					
	$0^m,0200$		$0^m,0144$		$0^m,0088$	
	observées par Coulomb.	calculées d'après M. Navier.	observées par Coulomb.	calculées d'après M. Navier.	observées par Coulomb.	calculées d'après M. Navier.
kil. 12,25	kil. »	kil. »	kil. 0,090	kil. 0,135	kil. »	kil. »
48,95	0,5577	0,699	0,354	0,333	»	»
97,90	1,0660	1,176	0,650	0,504	0,252	0,243
146,85	1,7500	1,653	»	»	»	»
244,75	2,2910	2,606	1,387	1,351	»	»

On voit par cette comparaison que les valeurs des coefficients A et B adoptées par M. Navier pour les cordes expérimentées conduisent à peu près aux mêmes valeurs de la résistance à l'enroulement sur un tambour d'un mètre de diamètre que celles qui sont données par les expériences précédentes, et comme elles satisfont aussi aux expériences faites avec l'appareil d'Amontons sur la corde de $0^m,0200$ de diamètre aux plus fortes charges parmi celles qui sont relatives aux cordes de $0^m,0144$ et $0^m,0088$, il s'ensuit qu'on peut adopter ces valeurs de A et de B pour les cordes blanches sèches et en bon état.

268. *Extension des résultats des expériences de Coulomb à*

des diamètres différents.— Pour étendre les résultats des expériences de Coulomb à des cordes de diamètres différents de ceux qui avaient été expérimentés, M. Navier a admis très-explicitement ce que Coulomb n'avait qu'assez vaguement indiqué : que les coefficients A étaient proportionnels à une certaine puissance du diamètre qui dépendait de l'état d'usé des cordes; mais cette supposition ne nous paraît pas justifiée ni même admissible, car elle conduirait à cette conséquence, qu'une corde usée d'un mètre de diamètre aurait la même roideur qu'une corde neuve, ce qui est évidemment faux, et d'ailleurs la comparaison même des valeurs de A et de B prouve que la puissance à laquelle il faut élever le diamètre ne serait pas la même pour les deux termes de la résistance *.

269. *Expression de la roideur des cordes en fonction du nombre des fils de caret.* — Puis donc que la forme proposée par M. Navier pour l'expression de la résistance des cordes

---

* En effet M. Navier suppose que $A=ad^{\mu}$ et $B=bd^{\mu}$, a et b étant des constantes qui ne dépendent pas de l'état d'usé de la corde, et μ un exposant qui devrait être le même dans les deux expressions, et qui varie de 2 à 1 selon l'usé. Or il est d'abord évident que, si la corde avait un diamètre $d=1^{m},00$, d^{μ} serait toujours égal à 1, quel que fût le degré d'usé, et qu'alors la résistance d'une vieille corde serait la même que celle d'une corde neuve, ce qui n'est pas admissible.

Mais de plus, M. Navier ayant donné pour des cordes des diamètres

$d=0^{m},0200$ les valeurs $ad^{\mu}=0^{kil},222460$, $bd^{\mu}=0,009738$,
$d=0^{m},0144$ — $ad^{\mu}=0^{kil},063514$, $bd^{\mu}=0,005518$,
$d=0^{m},0088$ — $ad^{\mu}=0^{kil},010604$, $bd^{\mu}=0,002380$,

on déduit

des valeurs de ad^{μ} en moyenne $\mu=3,7526$ et $a=531286^{kil}$,
et de celles de bd^{μ} — $\mu=1,7174$ et $b=8^{kil},0520$.

Il suit donc de là que les valeurs des coefficients A et B ne sauraient être de la forme ad^{μ} et bd^{μ} que leur a assignée M. Navier, l'exposant μ ne pouvant être le même pour ces deux quantités, et les facteurs constants a et b devant varier avec l'état d'usé des cordes.

ement ne peut être admise, il convient d'en re-
une autre, et il semble naturel d'essayer si les
et B ne pourraient pas être exprimés, pour les
nches, simplement d'après le nombre de fils de
cordes, comme Coulomb l'a trouvé pour les cordes
ées.

divisant les valeurs de A, obtenues par M. Navier
ue corde, par le nombre de fils de caret, on trouve
our

$$n = \quad d = 0^m,0200 \quad A = 0,222460 \quad \frac{A}{n} = 0,0074153$$

$$n = 15 \quad d = 0^m,0114 \quad A = 0,063514 \quad \frac{A}{n} = 0,0042343$$

$$n = 6 \quad d = 0,0088 \quad A = 0,010604 \quad \frac{A}{n} = 0,0017673$$

On voit par là que le nombre A n'est pas simplement proportionnel au nombre de fils de caret.

En comparant ensuite les valeurs du rapport $\frac{A}{n}$ correspondant aux trois cordes, on trouve les résultats suivants :

NOMBRE de fils.	VALEURS de $\frac{A}{n}$	DIFFÉRENCES des nombres de fils.	DIFFÉRENCES des valeurs de $\frac{A}{n}$	DIFFÉRENCES des valeurs de $\frac{A}{n}$ par fil de différence.
30	0,0074153	De 30 à 15. 15 fils.	0,0031810	0,000212
15	0,0042343	De 15 à 6. 9	0,0024470	0,000272
6	0,0017673	De 15 à 6. 24	0,0056480	0,000252
		Différence moyenne par fil.......		0,000245

Il suit de là que l'on représentera avec toute l'exactitude

suffisante pour la pratique les valeurs de A, données par l'expérience, par la formule

$$A = n[0,0017673 + 0,000245(n-6)] = n[0,0002973 + 0,000245n],$$

expression relative seulement aux cordes blanches et neuves, comme celles sur lesquelles Coulomb a opéré.

Quant à la valeur de B, elle paraît être proportionnelle au nombre de fils de caret, car l'on trouve pour

$$n=30 \quad d=0^m,0200 \quad B=0,009738 \quad \frac{B}{n}=0,0003246$$

$$n=15 \quad d=0^m,0144 \quad B=0,005518 \quad \frac{B}{n}=0,0003678$$

$$n=6 \quad d=0^m,0088 \quad B=0,002380 \quad \frac{B}{n}=0,0003967$$

Moyenne. . . . 0,0003630

d'où

$$B=0,000363n.$$

Par conséquent on représenterait, avec une exactitude suffisante pour la pratique, les résultats des expériences de Coulomb sur les cordes blanches neuves et sèches, par la formule

$$R = n[0,000297 + 0,000245n + 0,000363.\ Q]\text{kil.},$$

qui donnerait la résistance à l'enroulement sur un tambour d'un mètre de diamètre, ou par la formule

$$R = \frac{n}{D}[0,000297 + 0,000245n + 0,000363.\ Q]\text{kil.}$$

pour un tambour d'un diamètre D.

270. *Observation relative aux cordes usées.* — Quant aux cordes usées, la règle donnée par M. Navier ne saurait être admise, ainsi que je l'ai fait voir dans la note précédente, puisqu'elle donnerait pour la roideur d'une corde d'un diamètre égal à l'unité la même roideur que pour une corde neuve; et c'est pour avoir adopté, ainsi que d'autres au-

rs, cette règle, sans en discuter, comme je viens de le faire, les éléments, que j'ai été conduit à ce résultat inadmissible, en calculant la table des roideurs des cordes insérée dans la troisième édition de mon *Aide-mémoire de mécanique pratique*, page 328.

Les expériences de Coulomb sur les cordes usées n'étant pas d'ailleurs assez complètes et ne fournissant aucune donnée précise, il n'est pas possible, sans de nouvelles recherches, de donner de règle, pour calculer la roideur de ces cordes.

271. *Cordes goudronnées.* — En calculant les résultats des expériences de Coulomb sur les cordes goudronnées, comme nous l'avons fait pour les cordes blanches, on trouve les valeurs suivantes :

$n = 30$ fils	$A = 0{,}34982$	$B = 0{,}0125605$
$n = 15$ fils	$A = 0{,}106003$	$B = 0{,}006037$
$n = 6$ fils	$A = 0{,}0212012$	$B = 0{,}0025997$

qui diffèrent très-peu de celles que M. Navier a données. Mais si l'on recherche la résistance correspondant à chaque fil de caret, on trouve

$n = 30$ fils	$\frac{A}{n} = 0{,}0116603$	$\frac{B}{n} = 0{,}000418683$
$n = 15$ fils	$\frac{A}{n} = 0{,}0070662$	$\frac{B}{n} = 0{,}000402466$
$n = 6$ fils	$\frac{A}{n} = 0{,}0035335$	$\frac{B}{n} = 0{,}000433283$
	Moyenne......	0,00041814

On voit par là que les valeurs de B, sont pour les cordes goudronnées comme pour les cordes blanches, sensiblement proportionnelles aux nombres des fils de caret, mais qu'il n'en est pas de même pour les valeurs de A, comme l'a admis M. Navier.

En comparant, comme nous l'avons fait pour les cordes

blanches, les valeurs de $\frac{A}{n}$ correspondant aux trois cordes, de 30, 15 et 6 fils, on obtient les résultats suivants :

NOMBRE de fils.	VALEURS de $\frac{A}{n}$	DIFFÉRENCE des nombres de fils.	DIFFÉRENCES des valeurs de $\frac{A}{n}$	DIFFÉRENCES des valeurs de $\frac{A}{n}$ par fil de différence.
30	0,0116603	De 30 à 15. 15 fils.	0,0045941	0,000306
15	0,0070662	De 14 à 6. 9	0,0035327	0,000392
6	0,0035335	De 30 à 6. 24	0,0081268	0,000339
			Moyenne.........	0,000346

Il suit de là que la valeur de A peut être représentée par la formule

$$A = n[0,035335 + 0,000346(n-6)] = [0,0014575 + 0,000346\,n]\,n,$$

et la résistance totale sur un rouleau de diamètre D, par

$$R = \frac{n}{D}[0,0014575 + 0,000346.n + 0,000418.\,Q]\text{ kil.}$$

Cette expression est exactement de même forme que celle qui est relative aux cordes blanches et montre que la roideur des cordes goudronnées est un peu supérieure à celle des cordes blanches neuves.

272. *Table des roideurs des cordes de différents diamètres enroulées sur un tambour d'un mètre de diamètre.* — A l'aide des deux formules déduites des expériences de Coulomb pour les cordes blanches, neuves et sèches, et pour les cordes goudronnées, les seules sur lesquelles on ait des expériences un peu nombreuses, on a pu former les tables suivantes, pour lesquelles on a calculé approximativement, d'après les données de Coulomb, les nombres de fils de

caret correspondant aux différents diamètres, à l'aide des formules

$$d^{\text{cent}} = \sqrt{0,1338n}$$

pour les cordes blanches sèches, et

$$d^{\text{cent}} = \sqrt{0,186n}$$

pour les cordes goudronnées, en observant que le cordage de six fils de Coulomb paraît trop petit, et en admettant que les nombres de fils soient proportionnels aux carrés des diamètres.

Tableau des roideurs des cordes enroulées sur un tambour d'un mètre de diamètre.

NOMBRE DE FILS.	CORDES BLANCHES.			CORDES GOUDRONNÉES.		
	DIAMÈTRE.	VALEUR de la roideur naturelle A.	VALEUR de la roideur propor-tionnelle à Q.	DIAMÈTRE.	VALEUR de la roideur naturelle A.	VALEUR de la roideur proportionnelle à Q.
	m.	kil.		m.	kil.	
6	0,0089	0,0106038	0,002178	0,0105	0,021201	0,002512992
9	0,0110	0,0225207	0,003267	0,0129	0,041143	0,003769488
12	0,0127	0,0388476	0,004356	0,0149	0,067314	0,005025984
15	0,0141	0,0595845	0,005445	0,0167	0,097712	0,006282480
18	0,0155	0,0847314	0,006534	0,0183	0,138339	0,007538976
21	0,0168	0,1142883	0,007623	0,0198	0,183193	0,008795472
24	0,0179	0,1482552	0,008712	0,0211	0,234276	0,010051968
27	0,0190	0,1866321	0,009801	0,0224	0,291586	0,011308464
30	0,0200	0,2294190	0,010890	0,0236	0,355125	0,012564963
33	0,0210	0,2766159	0,011979	0,0247	0,424891	0,013821456
36	0,0220	0,3282228	0,013068	0,0258	0,500886	0,015077952
39	0,0228	0,3842397	0,014157	0,0268	0,583108	0,016334448
42	0,0237	0,4446666	0,015246	0,0279	0,671559	0,017590944
45	0,0246	0,5095035	0,016335	0,0289	0,766237	0,018847440
48	0,0254	0,5787504	0,017424	0,0298	0,867144	0,020103936
51	0,0261	0,6524073	0,018513	0,0308	0,974278	0,021360432
54	0,0268	0,7304742	0,019602	0,0316	1,087641	0,022616928
57	0.0276	0,8129511	0,020691	0,0326	1,207231	0,023873424
60	0,0283	0,8998380	0,021780	0,0334	1,333050	0,025129920

273. *Cordes mouillées.* — Quant aux cordes mouillées, les résultats des expériences de Coulomb sont trop peu concluants pour qu'on en puisse déduire quelque règle pratique : car il a trouvé que pour les cordes de 15 et de 6 fils la présence de l'eau n'augmentait pas la roideur, et que pour la corde de 30 fils le terme constant A représentant la roideur naturelle, était seul augmenté et à peu près doublé. M. Navier, et après lui les autres auteurs, ont admis d'après cela qu'il fallait, dans ce cas, doubler la valeur du terme A, en conservant au terme B la même valeur. Mais il serait nécessaire de faire à ce sujet de nouvelles expériences plus complètes et plus concluantes.

274. *Usage des tables ou formules précédentes.* — Pour trouver la roideur d'une corde d'un diamètre ou d'un nombre de fils de caret donné, on recherchera d'abord, dans la table ou par la formule, les valeurs des quantités A et B correspondant à ces données, et, connaissant la tension Q du brin enroulé, on aura sa résistance à l'enroulement sur un tambour d'un mètre de diamètre, par la formule

$$R_1 = A + BQ.$$

Puis, en divisant cette quantité par le diamètre de la poulie ou du rouleau sur lequel la corde doit être effectivement enroulée, on aura la résistance à l'enroulement sur ce rouleau.

Exemple. Quelle est la roideur d'une corde blanche sèche, en bon état, de $0^m,028$ de diamètre ou de 60 fils, qui s'enroule sur une poulie de chèvre de $0^m,220$ de diamètre à la gorge, sous une tension de 800 kilogrammes ; la table donne pour la corde blanche sèche en bon état, de 60 fils de caret, enroulée sur un tambour d'un mètre de diamètre :

$$A = 0^{kil},899838 \qquad B = 0,02178,$$

on a

$$D = 0^m,220 + 0^m,028 = 0^m,248,$$

et par suite

$$R = \frac{0,899838 + 0,02178 \times 800}{0,248} = 73^{kil},883.$$

La résistance totale à vaincre, non compris le frottement des axes, est donc

$$Q + R = 800^{k} + 73^{k},883 = 873^{kil},883.$$

On voit que dans cet exemple la roideur a augmenté cette résistance de $\frac{1}{9}$ environ de sa valeur.

DU TIRAGE DES VOITURES

ET DES EFFETS DESTRUCTEURS QU'ELLES PRODUISENT SUR LES ROUTES.

278. *Du tirage des voitures.* — L'étude des effets qui se produisent dans la marche des voitures peut être partagée en deux parties distinctes : le tirage des voitures proprement dit, et l'action qu'elles exercent sur les routes.

Les recherches relatives au tirage des voitures ont pour objet de déterminer l'intensité de l'effort que la puissance motrice doit exercer, suivant la grandeur de la charge, celle du diamètre, de la largeur des roues, et aussi suivant la vitesse et l'état ou la nature des routes.

Les premières expériences sur la résistance que les corps cylindriques éprouvent en roulant les uns sur les autres sont dues à Coulomb, qui, à l'occasion de celles qu'il voulait faire sur la roideur des cordes, détermina la résistance que des rouleaux, en bois de gaïac ou d'orme, éprouveraient sur des surfaces planes en chêne, mises de niveau.

Les rouleaux employés étant placés perpendiculairement à la direction des pièces de chêne, on passait par-dessus des ficelles flexibles, à chaque bout desquelles on suspendait des poids égaux, et, selon le nombre de cordes ainsi chargées, on faisait varier la pression totale.

A une autre corde enroulée au milieu des rouleaux, on suspendait un poids moteur, dont on déterminait par expérience la valeur, de manière qu'il fût suffisant pour entretenir un mouvement *lent et continu*, voisin de l'uniformité.

Les pressions ou charges totales et les poids moteurs dé-

terminés dans les expériences par Coulomb sont rapportés dans le tableau suivant.

Résultats des expériences de Coulomb sur la résistance au roulement.

NATURE des rouleaux.	PRESSION.	RÉSISTANCE pour les diamètres de 6po.	RÉSISTANCE pour les diamètres de 2po.
	#	"	#
Gaïac	100	0,60	1,6
	500	3,00	9,4
	1000	6,00	18,0
		diamètres de 12po	de 6po
Orme	1000	5"	10"

L'examen de ces résultats montre que, dans ces expériences, la résistance était sensiblement proportionnelle à la pression et en raison inverse du diamètre des rouleaux.

Des expériences analogues ont été exécutées à Vincennes et au Conservatoire des arts et métiers, avec des rouleaux en bois de différents diamètres, roulant sur du bois, du cuir et du plâtre. Le corps de ces rouleaux avait toujours à peu près $0^m,200$ de diamètre et le mode d'observation était analogue à celui de Coulomb. Seulement les courses totales étaient plus grandes et le mouvement était observé avec des moyens plus précis.

D'après la disposition des appareils, si l'on nomme :

Q le poids moteur qui, dans chaque cas, entretient un mouvement uniforme ;

r le rayon de la partie du rouleau qui représentait la roue ;

r' le rayon du corps du rouleau ou le bras de levier du poids moteur ;

R la résistance au roulement;

On a pendant le mouvement uniforme la relation

$$R.r = Q.r',$$

d'où l'on déduit dans chaque cas

$$R = Q.\frac{r'}{r}.$$

D'après la loi admise par Coulomb, la résistance au roulement étant proportionnelle à la pression, que nous appelons P, et en raison inverse du rayon ou du diamètre des rouleaux, elle peut être exprimée par la formule

$$R = A.\frac{P}{r},$$

dans laquelle A serait un nombre constant pour chaque nature de terrain, mais variable de l'un à l'autre, même pour le même terrain et suivant son état. Nous rapporterons ici quelques résultats des expériences faites à Vincennes et au Conservatoire, ainsi que toutes les données à l'aide desquelles on a calculé, pour chaque cas, la valeur du nombre $A = \frac{Rr}{P}$, qui doit être constant, selon la loi de Coulomb.

Ces résultats, inscrits au tableau suivant, prouvent que la loi de Coulomb s'applique encore, avec toute l'exactitude désirable pour la pratique, au cas actuel, mais que de plus la résistance augmente quand la largeur des parties en contact diminue.

D'autres expériences du même genre ont confirmé ces conclusions, et l'on peut admettre, au moins comme lois de pratique suffisamment exactes, que pour les bois, le plâtre, le cuir, et généralement pour les corps durs, la résistance au roulement est à très-peu près :

1° Proportionnelle à la pression,

2° En raison inverse du diamètre des rouleaux,

3° D'autant plus grande que la largeur de la zone de contact est plus petite.

Expériences sur des rouleaux de chêne roulant sur du peuplier.

LARGEUR des bandes de peuplier.	PRESSION des rouleaux, P.	POIDS moteur, Q.	BRAS de levier du poids moteur, r'.	BRAS de levier de la résistance, r.	VALEUR de la résistance R.	VALEUR du nombre $A = \frac{Rr}{P}$
m.	kil.	kil.	m.	m.	kil.	
0,100	197,54	1,752	0,1005	0,1810	0,972	0,000891
	175,17	1,585	0,0973	0,1355	1,124	0,000869
	168,01	1,346	0,1015	0,0902	1,514	0,000813
	185,73	1,715	0,1020	0,0450	3,848	0,000932
				Moyenne........		0,000876
0,025	199,855	3,565	0,1000	0,1810	1,979	0,001797
	169,855	3,190	0,1015	0,0902	3,589	0,001906
	187,700	3,690	0,1010	0,0450	8,280	0,001984
				Moyenne........		0,001896

276. ***Expériences sur des voitures marchant sur des routes ordinaires.*** — Les expériences dont on vient de citer quelques résultats ne suffisaient pas pour autoriser à en étendre les conclusions au mouvement des voitures sur les routes ordinaires. Il était nécessaire d'opérer directement sur des voitures, dans les circonstances habituelles de leur service. Des expériences ont été entreprises à ce sujet d'abord à Metz en 1837 et 1838, puis à Courbevoie en 1839 et 1841, avec des voitures de toute espèce, et l'on a étudié séparément l'influence de la pression, celle du diamètre des roues, celle de leur largeur, celle de la vitesse de transport, celle de l'état du sol, sur l'intensité du tirage.

Pour indiquer la marche suivie dans la discussion des résultats immédiats des expériences, nous appellerons :

P le poids total de la voiture, non compris les roues;

p' et p'' les poids respectifs des roues de devant et de derrière;

P_1 la pression totale sur le sol;

P' et P'' les composantes du poids P sur chacun des essieux;

r' et r'' les rayons des roues de devant et de derrière;

r_1' et r_1'' les rayons moyens de chacune des boîtes de roues;

F l'effort de traction dans le sens des traits;

F_1 la composante de cet effort, parallèlement au sol.

La pression du train de devant sur le sol sera $P' + p'$, celle du train de derrière $P'' + p''$, et d'après la loi de Coulomb la résistance au roulement sera :

$$\text{Pour le train de devant } A.\frac{P'+p'}{r'},$$

$$\text{Pour le train de derrière } A.\frac{P''+p''}{r''}.$$

Le frottement des boîtes contre leurs essieux, rapporté à la circonférence de la roue, sera :

$$\text{Pour le train de devant } f.\frac{P'r_1'}{r'},$$

$$\text{Pour le train de derrière } f.\frac{P''r_1''}{r''}.$$

Enfin, si le sol est incliné, la composante du poids total $P + p' + p''$, dans le sens de la pente, sera

$$(P + p' + p'')\frac{H}{L}$$

en appelant H la différence du niveau correspondant à la longueur L. Cette composante agira d'ailleurs comme résistance dans les montées et comme puissance dans les descentes.

D'après cela il est évident que, dans la montée par exem-

ple, la résistance totale au roulement sera, en appelant R′ et R″ les résistances particulières à chaque train,

$$R'+R''=F_1-f.\left(\frac{P'r_1'}{r'}+\frac{P''r_1''}{r''}\right)-(P+p'+p'')\frac{H}{L}.$$

Les quantités f, P′, P″, r', r'', r_1', r_1'', F, p', p'', H et L, ont été données par mesures directes, la quantité F_1 par l'expérience faite au dynamomètre; on a donc eu pour chaque cas la valeur de $R'+R''=R$.

Si la loi de Coulomb est vraie, on a d'ailleurs

$$R=R'+R''=A\left(\frac{P'+p'}{r'}+\frac{P''+p''}{r''}\right),$$

d'où l'on tirera la valeur de la quantité A, qui doit être constante :

$$A=\frac{R}{\frac{P'+p'}{r'}+\frac{P''+p''}{r''}}.$$

Si les roues sont égales, l'expression ci-dessus se réduit à

$$A=\frac{R.r}{P'+p'+P''+p''}=\frac{Rr}{P+p'+p''}.$$

277. *Rapport du tirage à la charge.* — Nous ferons de suite remarquer que, si la loi de Coulomb peut être admise, l'effort horizontal de traction à exercer sur un sol de niveau aura, d'après ce qui précède, pour expresion

$$F_1=A\left[\frac{P'+p'}{r'}+\frac{P''+p''}{r''}\right]+f\frac{P'r_1'}{r'}+f\frac{p''r_1''}{r''},$$

ou, puisque les rayons des boîtes sont ordinairement les mêmes aux deux trains et égaux à une valeur moyenne r_1,

$$F_1=(A+fr_1)\left[\frac{P'}{r'}+\frac{P''}{r''}\right]+A\left[\frac{p'}{r'}+\frac{p''}{r''}\right].$$

On voit d'ailleurs que, si l'on voulait rendre le tirage des deux trains le même, il faudrait faire

$$\frac{P'+p'}{r'}=\frac{P''+p''}{r''},$$

condition qui, par suite de la relation approchée

$$\frac{p'}{r'} = \frac{p''}{r''}$$

se réduit à

$$\frac{P'}{r'} = \frac{P''}{r''},$$

c'est-à-dire qu'il faut faire en sorte que la charge soit répartie en raison directe des rayons des roues ; mais nous verrons que l'industrie des transports, qui dans la pratique se conforme à peu près à cette règle, a intérêt à augmenter encore la charge des grandes roues au delà de la proportion à laquelle nous sommes conduits.

Si nous admettons cette proportion et que nous nous rappelions que $P' + P'' = P$, on trouvera que

$$F_1 = (A + fr_1) \cdot \frac{2P}{r' + r''} + A\left(\frac{p'}{r'} + \frac{p''}{r''}\right),$$

attendu que l'on a à peu près

$$\frac{P'}{r'} = \frac{P''}{r''} = \frac{P}{r' + r''}.$$

Si maintenant nous cherchons la valeur du rapport du tirage à la charge, nous trouverons

$$\frac{F_1}{P_1} = \frac{(A + fr_1)}{r' + r''} \cdot \frac{2P}{P_1} + \frac{A\left(\frac{p'}{r'} + \frac{p''}{r''}\right)}{P_1}.$$

Dans les applications aux voitures pesamment chargées, qu'il est le plus important de considérer, le poids des roues n'est qu'une fraction assez petite de la charge et du poids propre du corps de la voiture, et il peut être négligé vis-à-vis de la charge totale, ce qui réduit ce rapport à

$$\frac{F_1}{P_1} = \frac{2(A + fr_1)}{r' + r''} \text{ pour les voitures à quatre roues,}$$

ou à

$$\frac{F_1}{P_1} = \frac{A + fr_1}{r} \text{ pour les voitures à deux roues.}$$

Ces expressions nous serviront plus tard à déterminer, à l'aide de l'expérience, le rapport du tirage à la charge pour les cas les plus usuels.

278. *Influence de la pression.* — Pour connaître l'influence de la pression sur la résistance au roulement, on a fait marcher les mêmes voitures à différentes charges sur la même route au même état. Nous rapporterons les résultats de quelques-unes de ces expériences faites au pas.

Expériences sur l'influence de la pression sur le tirage des voitures.

VOITURES EMPLOYÉES.	ROUTE PARCOURUE.	PRESSION.	TIRAGE.	RAPPORT du tirage à la charge.
		kil.	kil.	
Chariot porte-corps d'artillerie.	Route de Courbevoie à Colombes, sèche, en bon état, avec poussière.	5992	180,71	$\frac{1}{38.6}$
		6140	159,9	$\frac{1}{39.2}$
		4580	113,7	$\frac{1}{40.2}$
Chariot de roulage non suspendu.	Route de Courbevoie à Bezons, solide, en gravier dur, très-sèche.	7126	138,9	$\frac{1}{51.3}$
		5458	111,5	$\frac{1}{48.9}$
		4450	93,2	$\frac{1}{47.7}$
		3430	68,4	$\frac{1}{50.2}$
Chariot de roulage suspendu.	Route de Colombes à Courbevoie; pavé en état ordin., avec boue humide.	1600	39,3	$\frac{1}{40.8}$
		3292	89,2	$\frac{1}{36.9}$
		4996	136,0	$\frac{1}{36.8}$
Voitures à six roues égales.	Route de Courbevoie à Colombes; ornières profondes; détritus humide.	3000	138,9	$\frac{1}{21.6}$
		4692	224,0	$\frac{1}{21.0}$
		6000	285,8	$\frac{1}{21.0}$
Deux voitures à six roues égales, accrochées l'une derrière l'autre.		6000	286,7	$\frac{1}{21}$

Il résulte de l'examen de ce tableau que, sur les routes

en empierrement solides et sur le pavé, *la résistance au tirage des voitures est sensiblement proportionnelle à la pression.*

On remarquera que les expériences faites au moyen d'une seule ou de deux voitures à six roues ont donné le même tirage total pour une même charge de 6000 kilogrammes, véhicules compris. Il suit de là que le tirage est, toutes choses égales d'ailleurs et entre certaines limites, indépendant du nombre des roues; on peut d'ailleurs tirer la même conséquence des résultats que renferme le tableau de la page suivante, relativement à une même voiture employée successivement avec six et avec quatre roues; la résistance a été la même dans les deux cas pour la même charge.

279. *Influence du diamètre des roues.* — Pour étudier l'influence du diamètre des roues sur le tirage, on a fait parcourir respectivement les mêmes parties de route, au même état, à des voitures pesant le même poids et ayant des largeurs de bandes égales, mais dont les diamètres seuls différaient entre des limites très-étendues. On a rapporté dans le tableau suivant quelques-uns des résultats obtenus.

On a ainsi comparé avec le chariot porte-corps d'artillerie, dont les roues ont un diamètre de $2^m,029$, différentes sortes de véhicules en y comprenant des camions dont les roues n'avaient pas un diamètre supérieur à $0^m,592$ et à $0^m,420$. Le rapport du tirage à la pression a varié de $\frac{1}{90}$ pour les plus grandes roues, jusqu'à $\frac{1}{22}$ pour les plus petites sur une route pavée en grès de Fontainebleau. Sur la route en empierrement de Courbevoie à Colombes les expériences n'ont porté que sur des diamètres compris entre $2^m,029$ et 0,872.

Ces exemples montrent que sur les routes solides on peut admettre comme loi pratique que *le tirage varie en raison inverse des diamètres des roues.*

Expériences sur l'influence du diamètre des roues sur la résistance au tirage des voitures.

VOITURES EMPLOYÉES.	ROUTES PARCOURUES	DIAMÈTRE des roues de devant $2r'$.	DIAMÈTRE des roues de derrière $2r''$.	PRESSION TOTALE, $P + p' + p''$.	TIRAGE F_1.	RAPPORT DU TIRAGE à la pression.	FROTTEMENT des boîtes sur les essieux.	RÉSISTANCE au roulement R.	VALEUR CALCULÉE de A.
		m.	m.	kil.	kil		kil.	kil.	
Chariot porte-corps d'artillerie.	Route de Courbevoie à Colombes, empierrement solide, avec poussière.	2,029	2,029	4928	81,6	$\frac{1}{60}$	9,6	72,0	$\frac{1}{67}$
		1,453	1,453	4930	108,6	$\frac{1}{45.5}$	14,4	94,2	$\frac{1}{72}$
		0,872	0,872	4924	179,0	$\frac{1}{27.4}$	25,3	153,7	$\frac{1}{73}$
Porte-corps d'artillerie	Pavé en grès de Fontainebleau.	2,029	2,029	4692	51,45	$\frac{1}{90.45}$	9,0	42,45	$\frac{1}{109}$
		1,453	1,453	4594	71,45	$\frac{1}{64.3}$	13,2	58,25	$\frac{1}{109}$
Chariot comtois....		1,110	1,358	1871	32,10	$\frac{1}{58.4}$	4,7	27,40	$\frac{1}{111}$
Voiture à 6 roues.....		0,860	0,860	3270	81,05	$\frac{1}{40.4}$	9,7	71,35	$\frac{1}{106}$
La même avec 4 roues..		0,860	0,860	3270	78,80	$\frac{1}{41.5}$	9,7	69,10	$\frac{1}{110}$
Camion.............		0,592	0,660	1500	52,30	$\frac{1}{28.8}$	8,8	43,50	$\frac{1}{110}$
Camion.............		0,420	0,597	1600	68,20	$\frac{1}{22.4}$	11,6	56,60	$\frac{1}{111}$

M. le général Piobert, qui s'est occupé de recherches théoriques et expérimentales sur la résistance au roulement, en a conclu que cette résistance varie en raison inverse d'une puissance du diamètre comprise entre $\frac{2}{3}$ et l'unité, et qui se rapproche d'autant plus de cette dernière limite que le sol est plus dur; et que sur le pavé cette résistance varie en raison inverse du rayon de la roue, augmenté de la saillie du pavé.

Si l'on cherche à appliquer cette loi aux expériences faites sur les routes en empierrement solide, sèches ou humides, en admettant, par exemple, que la puissance du rayon à employer soit $\frac{4}{5}$, on trouve les résultats insérés dans la dernière colonne du tableau précédent. L'examen de ces résultats, que nous avons exprimés en fractions ordinaires, pour que la comparaison soit plus facile, montre que la loi de Coulomb représente les résultats de l'expérience faite sur la route de Courbevoie à Colombes, sur des chariots porte-corps d'artillerie, avec une exactitude de $\frac{1}{12,5}$: tandis qu'en faisant varier la résistance en raison inverse de la puissance $\frac{4}{5}$ du rayon, on obtient une approximation de $\frac{1}{15}$.

Or, dans de semblables recherches, l'on ne peut guère se flatter d'obtenir des résultats directs d'expérience, qui ne diffèrent pas entre eux de plus de $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{15}$, ce qui correspond aux limites calculées successivement par les deux lois. Il suit de là que pour la pratique on peut, lorsqu'il s'agira de routes solides, adopter la loi simple de Coulomb, sans crainte de commettre d'erreur grave.

280. *Influence de la largeur des jantes.* — Cette influence a été étudiée d'abord avec un appareil composé d'un arbre

en fonte, sur lequel on plaçait des disques en fonte, tournés à leur contour, et formant à la fois la charge et les roues, dont la largeur totale était ainsi proportionnelle à leur nombre ; plus tard on a employé sur les routes ordinaires des voitures dont les roues avaient même diamètre et des largeurs inégales. Quelques-uns des résultats des expériences sont consignés dans le tableau suivant :

Expériences sur l'influence de la largeur des jantes sur la résistance au roulement.

VOITURES employées.	SOL parcouru.	DIAMÈTRE des roues de devant $2r$.	DIAMÈTRE des roues de derrière $2r'$.	LARGEUR des bandes.	PRESSION TOTALE.	RÉSISTANCE au roulement.	VALEUR DE A.
		m.	m.	m.	kil.	kil.	
Appareil avec arbre en fonte.	Sol du polygone de Metz.	0,787		0,045	1042,0	160,2	0,0604
				0,090	1335,0	209,2	0,0616
				0,135	1447,0	179,6	0,0488
	Hangar de manœuvre de l'École de Metz ; sable de 0m,12 à 0m,15 d'épaisseur.	0,787		0,045	1045,6	252,2	0,0951
				0,090	1355,0	237,3	0,0778
				0,135	1441,1	270,7	0,0739
				0,185	1380,0	221,3	0,0632
				0,225	1664,5	359,3	0,0612
Porte-corps d'artillerie.	Route de Courbevoie à Colombes, humide.	1,438	1,438	0,175	3464	75,5	0,0154
		1,449	1,449	0,060	3608	75,4	0,0151
Porte-corps d'artillerie.	Pavé en grès de Fontainebleau.	1,438	1,438	0,175	5516	83,0	0,0111
		1,453	1,453	0,115	5518	72,8	0,0095
		1,453	1,453	0,115	4594	58,2	0,0092
Voitures à six roues.		0,860	0,860	0,060	3270	71,6	0,0094

Ces exemples montrent 1° *que sur les sols mous la résistance augmente à mesure que la largeur de la jante diminue ;* *il convient donc à l'agriculture*, *pour la conservation de ses*

attelages, d'employer des jantes d'une certaine largeur, de 0^{m},10 *environ, et non pas des jantes très-étroites.* 2° *Que sur les routes solides en empierrement et en pavé, la résistance est à très-peu près indépendante de la largeur de la jante.*

281. *Influence de la vitesse.*—Pour reconnaître l'influence de la vitesse sur le tirage des voitures, on a fait marcher sur différentes routes, à divers états, les mêmes voitures, en ne faisant varier dans chaque série d'expériences que la vitesse, qui a été successivement celle du pas, du pas allongé, du trot, du grand trot.

Quelques-uns des résultats des expériences sont rapportés dans le tableau suivant :

Expériences sur l'influence de la vitesse sur la résistance au tirage des voitures.

VOITURE employée.	SOL parcouru.	CHARGE.	ALLURE.	VITESSE.	TIRAGE.	RAPPORT du tirage à la charge.
		k.		m.	k.	
Appareil avec arbre en fonte.	Sol du polygone de Metz, humide et mou.	1042	pas.........	1,40	165,0	$\frac{1}{6.35}$
			trot	2,80	168,0	$\frac{1}{6.6}$
		1335	pas.........	1,28	215,0	$\frac{1}{6.2}$
			trot........	3,38	197,0	$\frac{1}{6.8}$
Affût de 16 avec sa pièce.	Route de Metz à Montigny, empierrement très-uni et très-sec.	3750	pas.........	1,26	92	$\frac{1}{40.8}$
			pas allongé..	1,52	92	$\frac{1}{40.8}$
			trot........	2,45	102	$\frac{1}{36.7}$
			grand trot...	3,78	121	$\frac{1}{31}$
Chariot des messageries, suspendu sur six ressorts.	Pavé en grès de Fontainebleau.	3288	pas.........	1,24	144	$\frac{1}{22.8}$
		5353	pas allongé..	1,70	153	$\frac{1}{22.0}$
			trot........	2,36	161	$\frac{1}{20.8}$
			trot allongé.	3,60	173,5	$\frac{1}{18.4}$

On voit par ces exemples que *le tirage n'augmente pas sensiblement avec la vitesse, sur les terrains mous, mais que, sur les routes solides et inégales, il augmente d'autant plus que le sol présente plus d'inégalités, et que la voiture est plus dure ou le mouvement plus rapide.*

282. *Expression approximative de l'accroissement de la résistance avec la vitesse.* — Pour chercher la relation qui lie la résistance à la vitesse, sur les terrains durs et raboteux, nous avons pris pour abscisses les vitesses et pour ordonnées les valeurs du nombre A, fournies par l'expérience, et cette représentation graphique des résultats nous a montré que tous les points ainsi déterminés étaient pour chaque série d'expériences situés à très-peu près sur une même ligne droite. Ainsi les séries d'expériences relatives à un affût de siége chargé de sa pièce, voiture très-rigide, mue à différentes vitesses sur une route en empierrement très-bonne et sur le pavé de la ville de Metz, sont représentées pl. V, fig. 4 et 5, et l'on voit que les valeurs des ordonnées, ou du nombre A, croissent avec les abscisses ou la vitesse suivant une loi, qui, dans les limites des expériences, peut être exprimée par une ligne droite coupant l'axe des ordonnées à une certaine hauteur, ce qui indique que pour une vitesse nulle la résistance a encore une certaine valeur ou qu'en général elle se compose d'une partie indépendante de la vitesse et d'une partie proportionnelle à cette vitesse. Cette résistance, ou plutôt la valeur du nombre A, peut donc être en général représentée par une expression de la forme

$$A = a + d(V - 1),$$

dans laquelle

a est un nombre constant pour chaque sol, à un état déterminé, et qui exprime la valeur du nombre A pour la vitesse $V = 1^m,00$, qui est celle du pas assez lent;

d un facteur constant pour chaque nature de terrain et chaque espèce de voitures.

Dans le cas particulier des deux séries d'expériences citées plus haut, on a pour l'affût de siége avec sa pièce :

Sur la route de Montigny, en très-bon empierrement.................... $A = 0^k,0100 + 0^k,0020(V-1)$.
Sur le pavé de Metz, en grès de Sierck. $A = 0^k,0066 + 0^k,0057(V-1)$.

Ces exemples suffisent pour faire voir :

1° Qu'au pas, la résistance sur un bon pavé est moindre que sur une très-bonne route en empierrement très-sèche ;

2° Qu'aux allures vives, la résistance sur le pavé croît rapidement avec la vitesse V.

Ainsi au pas, sur le pavé de Metz, et avec des roues de $1^m,00$ de rayon, la résistance serait de $6^k,6$ pour 1000 kilogrammes de charge totale, véhicule compris, tandis qu'à la vitesse du grand trot, $V = 4^m$, elle serait de

$$6^k,6 + 5^k,7 \times 3 = 23^{kil},7,$$

c'est-à-dire presque quadruple.

Sur le pavé de Fontainebleau, à joints larges, à bords arrondis, qui offre tant d'inégalités et dont les éléments peuvent se déplacer sous l'action de la charge, la résistance au pas est plus grande que sur le pavé de Metz, et l'accroissement de cette résistance avec la vitesse est encore plus rapide. La figure 6, qui représente les résultats d'expérience, obtenus avec un chariot des messageries générales dont les ressorts avaient été calés pour le transformer en une voiture non suspendue, montre que l'inclinaison de la ligne droite ou l'accroissement de la vitesse est beaucoup plus considérable que sur le pavé de Metz, et l'on en déduit pour représenter les valeurs du nombre A la formule

$$A = 0^k,0092 + 0^k,0089\,(V-1),$$

qui montre que pour des roues de $1^m,00$ de rayon la résistance, au pas de $1^m,00$ de vitesse, serait de $9^{kil},2$ par 1000 kilogrammes de charge, c'est-à-dire de près de moitié

en sus de celle qu'offre le pavé de Metz, et qu'au grand trot, à la vitesse de $4^{m},00$ en $1''$, elle serait égale à

$$9^{kil},2+8^{kil},9\times 3=35^{kil},9,$$

tandis que sur le pavé de Metz elle ne serait que de $23^{kil},7$.

Quant aux voitures suspendues, l'expérience montre que la résistance croît aussi, mais beaucoup plus lentement, avec la vitesse, sur les routes dont la surface est raboteuse. Ainsi sur le pavé de Paris (fig. 7) le même chariot des messageries générales, dont les ressorts avaient leur liberté d'action, n'a plus donné, pour la valeur du nombre A, que l'expression

$$A=0^{k},0098+0^{k},0025\,(V-1),$$

de sorte qu'au trot, à la vitesse de $4^{m},00$, et avec des roues de $1^{m},00$ de rayon, la résistance pour une charge de 1000 kilogrammes ne serait que de

$$9^{k},8+2^{k},5\times 3^{kil}=17,30,$$

c'est-à-dire la moitié de celle qu'aurait éprouvée le même chariot, non suspendu, sur le même pavé, à la même vitesse.

283. *Conséquences pratiques de ces expériences.* — Ces expériences ont montré d'une part le grand avantage qu'offrent, sous le rapport de la traction et de l'économie de la puissance motrice, les voitures bien suspendues sur celles qui ne le sont pas, et de l'autre la supériorité du pavé dont les joints sont étroits et serrés, et la surface unie, sur le pavé à joints larges et à surface inégale généralement employé à Paris. Ces résultats, obtenus en 1837 et publiés en 1838, ont appelé l'attention des ingénieurs, et l'on peut croire qu'ils ont provoqué les essais, que l'on a faits depuis avec succès, sur l'emploi de pavés taillés et de formes régulières, dont le public apprécie facilement les avantages.

284. *Comparaison des routes pavées et des routes en empierrement.* — Les mêmes expériences nous montrent que, si, pour le roulage au pas, les routes pavées offrent un avan-

tage sur les routes en empierrement, il n'en est pas de même pour les grandes vitesses sur les bonnes routes en empierrement, sèches et en parfait état; mais que, quand ces routes sont mouillées, le pavé reprend son avantage. On trouve en effet, pour ce dernier cas, que sur la route de Metz à Nancy, mouillée, avec un peu de boue et des cailloux à fleur du sol, la valeur du nombre A, qui représente la résistance par 1000 kilogrammes de charge avec des roues de $1^m,00$ de rayon, pour les diligences des messageries générales bien suspendues, est donnée par la formule

$$A = 0^k,014 + 0^k,0022\,(V - 1).$$

En la comparant à celle que l'on a obtenue pour le pavé de Paris, on trouve que le tirage par 1000 kilogrammes avec des roues de $1^m,00$ de rayon serait :

Aux vitesses de	$1^m,00$	$2^m,50$	$3^m,00$	$4^m,00$ en $1''$.
Sur la route en empierrement mouillée de Nancy	$14^{kil},00$	$17^{kil},30$	$18^{kil},40$	$20^{kil},60$
Sur le pavé de Paris	9 ,80	13 ,55	14 ,80	17 ,30

L'excès de tirage offert par les routes en empierrement mouillées provient principalement de leur compressibilité, et il croît naturellement à mesure que les matériaux sont plus tendres, la route plus humide et moins bien entretenue.

Cette dernière circonstance exerce sur la résistance à la traction une influence énorme dont les conséquences, nuisibles à l'industrie des transports, n'attirent pas assez l'attention. Des expériences exécutées en septembre et octobre 1841 avec le même chariot, parcourant successivement diverses parties d'une même route, ont montré que, les matériaux et la saison étant les mêmes, le tirage de cette voiture sur les parties bien entretenues était $\frac{1}{35}$ à $\frac{1}{36}$ de la charge, tandis que sur des parties mal entretenues il s'élevait à $\frac{1}{25}$ et $\frac{1}{21}$.

285. *Influence de l'inclinaison des traits.* — Pour étudier l'influence de cet élément de la question on s'est servi d'un affût de siége à roues égales dont on a successivement incliné le timon à

$$1°35', 3°35', 6°30', 8°30', 11°0', \text{ et } 13°30',$$

et l'on a fait marcher cette voiture sur un sol couvert de gazon encore humide, en conservant d'ailleurs le même poids et la même vitesse dans tous les cas.

L'effort de traction F, mesuré par le dynamomètre et exercé dans le sens des traits, se décomposait évidemment en deux forces, l'une F' horizontale et parallèle au sol, qui produisait le mouvement et surmontait toutes les résistances; l'autre verticale, F'', qui diminuait la pression de l'avant-train sur le sol.

Il en résulte qu'en conservant les notations du n° **276**, la pression sur le sol peut être exprimée par

$$0{,}96\,[P'+P'']+0{,}4F',$$

de sorte qu'en nommant

f le rapport du frottement à la pression,

r_1 le rayon moyen des boîtes,

r celui des roues;

L le chemin total parcouru,

L'équation du mouvement de cette voiture, sur un sol horizontal, était approximativement

$$F'L=(R'+R'')L+0{,}96\frac{fr_1}{r}L(P'+P''-F'')+0{,}4\frac{fr_1}{r}F'.$$

On avait d'ailleurs

$$r_1=0^m{,}038 \quad r=0^m{,}782 \quad f=0{,}065.$$

Or, avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer qu'attendu la petitesse du terme

$$\frac{0{,}4fr_1}{r}=0{,}00252,$$

on peut évidemment négliger la valeur de cette expression

et réduire celle de $R'+R''$, tirée de l'équation précédente, à

$$R'+R''=F'-\frac{0,96\,fr_1}{r}(P'+P''-F'')=F'-0,0299(P'+P''-F''),$$

et d'un autre côté nous savons que

$$R'+R''=A\,\frac{P_1-F''}{r}:$$

on a donc, pour comparer les résultats de la formule ci-dessus à l'expérience, la relation

$$A=\frac{F'-0,00299(P'+P''-F'')}{\frac{P_1-F''}{r}}.$$

Or cette comparaison a donné les résultats suivants, qui sont des moyennes de plusieurs expériences répétées pour chaque cas :

Inclinaison du tirage...	1°,35′	3°,35′	6°,30′	8°,30′	11°,0′	13°,31′
Valeur du nombre A...	0,0349	0,0349	0,0359	0,0349	0,0349	0,0310

L'accord de toutes ces valeurs montre que les effets mécaniques se passent exactement comme l'indique la formule, où l'on a tenu compte de la décomposition des efforts; par conséquent, pour reconnaître quelle est l'inclinaison qui correspond au maximum d'effet, on trouve, par les méthodes de calcul connues, qu'en nommant h la hauteur du point d'attache antérieur des traits au-dessus du point d'attache postérieur,

b la projection horizontale de la distance de ces deux points, le rapport de ces quantités, correspondant au maximum d'effet de la puissance motrice, doit être

$$\frac{h}{b}=\frac{A+0,96fr_1}{r-0,4fr_1}.$$

Cette expression montre que, pour une voiture donnée, l'inclinaison des traits, ou la valeur de $\frac{h}{b}$, doit être d'autant plus

grande que la valeur A ou de la résistance du sol l'est elle-même davantage, et sous ce rapport le sol choisi pour les expériences était très-convenable; de plus, pour un sol donné, cette même inclinaison augmente à mesure que le rayon des roues diminue.

En appliquant la relation ci-dessus à l'affût de siége et au sol mis en expérience, pour lesquels on avait

$$r=0^{m},782,\quad f=0,065,\quad r_1=0^{m},038,\quad A=0^{k},0349,$$

on trouve

$$\frac{h}{b}=0,0478=\frac{1}{20,9}$$

Si l'on avait avec les mêmes données $r=0^{m},25$, comme pour des camions, on trouverait

$$\frac{h_1}{b}=0,148=\frac{1}{6,75},$$

quantité beaucoup plus petite que celle qui est en usage.

Sur des routes en empierrement, pour lesquelles $A=0,015$ à l'état ordinaire d'humidité et d'entretien, on trouverait pour les voitures d'artillerie

$$\frac{h}{b}=0,022=\frac{1}{45,5},$$

ce qui est à peu près l'inclinaison adoptée pour l'artillerie de siége destinée à voyager sur les grandes routes.

Il ne nous paraît pas nécessaire de pousser plus loin cette discussion, à laquelle les constructeurs attachent en général plus d'importance qu'elle ne mérite, et nous nous bornerons à dire qu'entre les limites où elle est nécessairement renfermée, l'inclinaison des traits a peu d'influence sur le tirage, et que, dans les cas ordinaires, elle doit être très-faible.

286. *Résumé et application des résultats généraux des expériences.* — Le tableau suivant renferme les valeurs du rap-

…LAGE : …12 …$=0^m,55$ …$=0^m,85$ …$r''=1^m,40$ …$=0,00206$	CHARRETTES : $l=0^m,10$ à $0^m,12$ $r_1=0^m,032$ $r'=0^m,80$ $fr_1=0,00206$	 $r'=1^m,00$ $fr_1=0,00206$	DILIGENCES des Messageries impériales et générales : $l=0^m,10$ à $0^m,12$ $r_1=0^m,12$ $r'+r''=1,15$ $fr_1=0,00206$		VOITURE à bancs suspendus : $l=0^m,07$ à $0^m,08$ $r_1=0^m,027$ $r'=0^m,45$ $r''=0^m,70$ $r'+r''=1^m,15$ $fr_1=0,00193$	
			pas	$\frac{1}{17,9}$	pas	$\frac{1}{18,1}$
$\frac{1}{21,8}$	$\frac{1}{24,9}$	$\frac{1}{31,1}$	trot	$\frac{1}{15,8}$	trot	$\frac{1}{15,9}$
			grand trot	$\frac{1}{14,9}$	grand trot	$\frac{1}{15,0}$
			pas	$\frac{1}{13,7}$	pas	$\frac{1}{13,8}$
$\frac{1}{16,7}$	$\frac{1}{19,0}$	$\frac{1}{23,8}$	trot	$\frac{1}{12,4}$	trot	$\frac{1}{12,5}$
			grand trot	$\frac{1}{11,8}$	grand trot	$\frac{1}{11,9}$
$\frac{1}{14,9}$	$\frac{1}{17,0}$	$\frac{1}{21,2}$	pas	$\frac{1}{12,2}$	pas	$\frac{1}{12,3}$
			trot	$\frac{1}{10,5}$	trot	$\frac{1}{9,9}$
			pas	$\frac{1}{62,0}$	pas	$\frac{1}{64,2}$
$\frac{1}{75,5}$	$\frac{1}{86,3}$	$\frac{1}{107,9}$	trot	$\frac{1}{42,0}$	trot	$\frac{1}{43,0}$
			grand trot	$\frac{1}{36,2}$	grand trot	$\frac{1}{37,0}$
			pas	$\frac{1}{57,1}$	pas	$\frac{1}{59}$
$\frac{1}{69,5}$	$\frac{1}{79,9}$	$\frac{1}{99,9}$	trot	$\frac{1}{38,1}$	trot	$\frac{1}{39,0}$
			grand trot	$\frac{1}{32,7}$	grand trot	$\frac{1}{33,3}$
			pas	$\frac{1}{57,1}$	pas	$\frac{1}{59}$
»	»	»	trot	$\frac{1}{40,9}$	trot	$\frac{1}{41,8}$
			grand trot	$\frac{1}{35,3}$	grand trot	$\frac{1}{36,5}$
			pas	$\frac{1}{44,0}$	pas	$\frac{1}{45,1}$
$\frac{1}{53,5}$	$\frac{1}{74,4}$	$\frac{1}{76,5}$	trot	$\frac{1}{32,9}$	trot	$\frac{1}{33,5}$
			grand trot	$\frac{1}{29,3}$	grand trot	$\frac{1}{29,8}$
$\frac{1}{49,8}$	$\frac{1}{69}$	$\frac{1}{71}$	pas et trot	$\frac{1}{40,8}$	pas et trot	$\frac{1}{41,8}$

ROUTE	CHARRETTES : $l = 0^m,10$ à $0^m,12$; $r_1 = 0^m,032$ — $r' = 0^m,80$; $fr_1 = 0,00208$	CHARRETTES : $r' = 1^m,00$; $fr_1 = 0,00208$	DILIGENCES des Messageries impériales et générales : $l = 0^m,10$ à $0^m,12$; $r_1 = 0^m,032$; $r' + r'' = 1^m,15$; $fr_1 = 0,00208$	VOITURE à bancs suspendus : $l = 0^m,07$ à $0^m,0$[illegible] ; $r_1 = 0^m,027$; $r' = 0^m,45$; $r'' = 0^m,70$; $r' + r'' = 1^m,15$; $fr_1 = 0,00175$
Accotement en terr	$\frac{1}{36,3}$	$\frac{1}{45,4}$	pas et trot $\frac{1}{26,1}$	pas et trot $\frac{1}{26,4}$
Accotement solide, $0^m,03$ à $0^m,04$ d'ép	$\frac{1}{14,0}$	$\frac{1}{17,5}$	pas et trot $\frac{1}{10,1}$	pas et trot $\frac{1}{10,1}$
Accotement solide $0^m,05$ à $0^m,06$ d'é	$\frac{1}{11,9}$	$\frac{1}{14,9}$	pas et trot $\frac{1}{8,6}$	pas et trot $\frac{1}{8,6}$
Sol en terre ferme ou route neuve .	$\frac{1}{11,1}$	$\frac{1}{13,9}$	pas et trot $\frac{1}{8,0}$	pas et trot $\frac{1}{8,0}$
Accotement ou rou	$\frac{1}{19,0}$	$\frac{1}{23,8}$	$\frac{1}{13,7}$	
Sol en terre ferm mêlé de gravier	$\frac{1}{10,5}$	$\frac{1}{13,1}$	pas et trot $\frac{1}{7,5}$	pas et trot $\frac{1}{6,9}$
Route en empierrement — en	$\frac{1}{66,2}$	$\frac{1}{82,8}$	pas $\frac{1}{47,6}$ trot $\frac{1}{40,9}$ grand trot $\frac{1}{39,7}$	pas $\frac{1}{49}$ trot $\frac{1}{41,8}$ grand trot $\frac{1}{40,6}$
ui	$\frac{1}{47,0}$	$\frac{1}{58,6}$	pas $\frac{1}{33,7}$ trot $\frac{1}{26,8}$ grand trot $\frac{1}{24,3}$	pas $\frac{1}{34,3}$ trot $\frac{1}{27,2}$ grand trot $\frac{1}{24,6}$
tr	$\frac{1}{56,9}$	$\frac{1}{71,0}$	pas $\frac{1}{40,8}$ trot $\frac{1}{26,5}$ grand trot $\frac{1}{22,6}$	pas $\frac{1}{41,8}$ trot $\frac{1}{27}$ grand trot $\frac{1}{22,8}$
so	$\frac{1}{36,2}$	$\frac{1}{45,2}$	pas $\frac{1}{26,1}$ trot $\frac{1}{21,7}$ grand trot $\frac{1}{20,0}$	pas $\frac{1}{26,4}$ trot $\frac{1}{22}$ grand trot $\frac{1}{20,3}$
so	$\frac{1}{29,5}$	$\frac{1}{36,9}$	pas $\frac{1}{21,0}$ trot $\frac{1}{18,5}$ grand trot $\frac{1}{17,1}$	pas $\frac{1}{21,5}$ trot $\frac{1}{18,5}$ grand trot $\frac{1}{17,2}$

port du tirage à la charge pour un grand nombre de circonstances différentes : les formules du numéro **277**, combinées avec les résultats directs des expériences, nous ont permis de calculer approximativement les valeurs de ce rapport pour les proportions les plus ordinaires des voitures employées dans l'industrie.

(Voir le tableau ci-contre.)

287. *Conclusions générales*. — De l'ensemble de toutes les expériences sur le tirage des voitures on peut conclure les lois pratiques suivantes :

1° La résistance, opposée au roulement des voitures par les routes en empierrement solide ou pavées, et rapportée à l'axe de l'essieu, dans une direction parallèle au terrain, est sensiblement proportionnelle à la pression ou au poids total du véhicule, et inversement proportionnelle au diamètre des roues.

2° Sur les chaussées pavées ou en empierrement, la résistance est à très-peu près indépendante de la largeur de la bande de roue.

3° Sur les terrains compressibles tels que les terres, les sables, le gravier, etc., la résistance décroît à mesure que la largeur de la bande augmente.

4° Sur les terrains mous, tels que les terres, les sables, les accotements en terre, etc., la résistance est indépendante de la vitesse.

5° Sur les routes en empierrement et sur le pavé, la résistance croît avec la vitesse. L'accroissement est d'autant moindre, que la voiture est mieux suspendue et la route plus unie.

6° L'inclinaison du tirage doit se rapprocher de l'horizontale, pour toutes les routes et pour les voitures ordinaires, autant que la construction le permet.

Nous rappellerons que ces lois simples ne sont pas ce qu'on appelle des lois mathématiques, mais seulement des lois approximatives, qui, pour les cas les plus ordinaires de la pratique et pour les dimensions habituelles des voitures

re[illegible]tent les résultats de l'expérience avec une exactitude [illegible]fisante, et à très-peu près égale à celle que l'on déduirait de l'expérience même. C'est en ce sens seulement que je les ai proposées et appliquées.

288. *Conséquences relatives à la construction des voitures.* — Il résulte de ce qui précède que l'industrie des transports a intérêt à employer pour les véhicules les roues du plus grand diamètre que comporte la construction et la destination de la voiture. Les charrettes se prêtant plus facilement que les chariots à deux roues à l'usage des grands diamètres, elles offrent sous ce rapport un avantage assez notable. Mais, d'une autre part, sur les routes en mauvais état et cahoteuses, le limonier, ballotté par les brancards, se fatigue, se ruine promptement s'il est ardent, ou ne travaille pas et se laisse traîner par les autres chevaux s'il est paresseux.

Or, en rapprochant l'essieu de derrière de celui de devant et en engageant davantage le premier sous la charge, il en résultera que la proportion de cette charge portée par les roues de derrière sera plus considérable et par conséquent que le tirage sera diminué. On pourrait donc réduire considérablement le tirage des petites roues, qui se trouveraient allégées, et transformer à peu près un chariot en une charrette. Seulement il faut néanmoins laisser à l'avant de la voiture une prépondérance de poids suffisante pour que, dans les montées, on ne soit pas exposé à voir la caisse se soulever et tourner autour de l'essieu de derrière. Cette observation montre que le pesage des voitures en bloc, et non par train, serait illusoire si l'on prétendait que la charge doit être partagée en parties égales sur chaque roue. Il faut dire que les voituriers ont depuis longtemps reconnu la nécessité de charger le train de derrière dans une proportion beaucoup plus grande que l'avant-train. Mais on voit que, pour une distribution donnée et à peu près constante de la charge dans le corps des voitures, telles que les

diligences, les omnibus, etc., il y a avantage à engager le plus possible l'essieu de derrière sous la voiture, et cela explique pourquoi, toutes choses égales d'ailleurs, les voitures courtes exigent moins de tirage que les voitures longues*.

289. *Des effets destructeurs produits par les voitures sur les routes.* — L'influence destructive que les voitures exercent sur les routes a depuis longtemps appelé l'attention des gouvernements et des ingénieurs; mais quelque importance que pût avoir cette question pour les intérêts de l'État et de l'industrie, l'on s'est jusqu'à ces derniers temps fort peu occupé de l'étude approfondie des faits, et l'on s'est contenté de considérations théoriques plus ou moins plausibles, mais fort souvent en contradiction avec la nature. Sans entrer dans une discussion qui sortirait des bornes que nous devons nous imposer ici, nous allons examiner successivement les conséquences que l'on peut déduire des expériences directes sur le tirage, quant à ce qui concerne la conservation ou la destruction des routes, puis nous exposerons les faits principaux que nous avons observés directement.

290. *Influence préservatrice des grands diamètres de roues.* — La résistance qu'une roue éprouve de la part du sol étant évidemment une mesure plus ou moins immédiate des efforts de compression ou de désagrégation qu'elle exerce sur le sol, on voit de suite que, puisque les roues d'un grand diamètre donnent lieu à un tirage moindre que celui des petites, elles doivent aussi produire moins de désagrégation sur les routes. Une observation bien simple confirme cette conclusion.

Si l'on prend des pierres de $0^m,07$ à $0^m,08$ de diamètre

---

* Pour plus de détails on pourra consulter les *Expériences sur le tirage des voitures et sur les effets destructeurs qu'elles exercent sur les routes.*

moyen et si, sur une route un peu humide et tendre, on place les unes en avant des petites roues d'une diligence et les autres en avant des grandes roues, on voit les premières, poussées en avant par les petites roues, pénétrer dans le sol en le labourant et le désagrégeant, tandis que les secondes, simplement pressées et appuyées par les grandes roues, n'éprouvent le plus souvent pas de déplacement.

Cet effet résulte bien évidemment de ce que, si l'on décompose l'effort exercé par la roue, sur la pierre au point de contact, en deux autres, l'un vertical qui tend à enfoncer le corps dans le sol, l'autre horizontal, qui tend à le pousser en avant, le second effort, qui produit la désagrégation de la route, est évidemment plus grand, à proportion, pour les petites roues que pour les grandes.

De cette simple observation l'on pouvait déjà conclure, comme je l'ai fait dès 1838, que *les effets de dégradation produits par les roues des voitures sont d'autant plus grands que les roues sont plus petites.*

De même l'expérience ayant prouvé que le tirage sur les sols durs augmente très-peu quand la largeur de la roue diminue, on pouvait aussi en conclure que les chargements susceptibles de produire des dégradations égales ne devaient pas croître proportionnellement aux largeurs des jantes, comme l'admettaient tous les règlements de police du roulage, et que les chargements accordés suivant ces règlements aux roues les plus larges devaient produire plus de dégradations que ceux des roues étroites.

Enfin, la résistance croissant avec la vitesse, il était naturel de penser que les voitures qui vont au trot font plus de mal aux routes que celles qui vont au pas. Mais la suspension, en diminuant l'intensité des chocs, pouvait compenser les effets de la vitesse dans certaines proportions.

291. *Expériences directes sur les effets destructeurs produits par les voitures sur les routes.* — Quelque rationnelles que

ces déductions des expériences sur le tirage des voitures pussent paraître, il était nécessaire de les vérifier par d'autres expériences spéciales, exécutées sur une grande échelle et ayant pour but d'étudier directement les effets destructeurs exercés sur les routes par les voitures, selon leurs diverses proportions et les circonstances de leur marche.

Ces expériences, commencées à Metz en 1837 par ordre du ministre de la guerre, ont été continuées aux environs de Paris en 1839, 1840 et 1841, par ordre du ministre des travaux publics.

Pour démêler les influences partielles de la largeur des jantes, du diamètre des roues et de la vitesse, sur la dégradation des routes, j'ai étudié séparément leurs effets, et pour constater les effets de dégradation, j'ai employé le relèvement direct de la route au moyen de profils transversaux, la mesure du tirage avant, pendant et après les expériences, et dans un grand nombre de cas la mesure de la quantité de matériaux employés à la réparation.

Le mode général d'expérimentation consistait à faire circuler les voitures sur une piste particulière, toujours la même, et entretenue par l'arrosage à un état à peu près égal d'humidité pour toutes, jusqu'à ce que le même poids total eût été transporté sur chaque piste, et ce poids total s'élevait presque toujours à 5 ou 6 000 000 kilogrammes et souvent au delà.

292. *Expériences sur l'influence de la largeur des jantes.* — Tous les règlements d'administration et les lois proposées pour la police du roulage ayant admis que, pour obtenir de toutes les voitures une égale action sur les routes, il fallait les charger de poids proportionnels à la largeur des jantes, il fallait rechercher si cette base des tarifs était exacte. A cet effet, trois chariots porte-corps d'artillerie, ayant tous des roues de $1^{m},45$ de diamètre environ aux trains de devant et de derrière, avec des largeurs respectives de bandes

de $0^m,060$, $0^m,115$ et $0^m,175$, ont été chargés, proportionnellement à ces largeurs, des poids respectifs suivants :

Voiture n° 1 à jantes de $0^m,060$, 2408 kilogrammes.
Voiture n° 2 — $0^m,115$, 4594
Voiture n° 3 — $0^m,175$, 6992

Ces chariots ainsi chargés ont été conduits sur trois pistes de 300 mètres de longueur chacune. Par l'effet des plantations existant sur les bords de la route, il est arrivé que la piste de la voiture n° 1, à jantes étroites, était généralement plus humide que celle des deux autres, et que par conséquent cette voiture se trouvait dans des circonstances moins favorables.

L'observation a montré que le tirage sur la piste de la voiture n° 3, à larges bandes, s'est accrue, avec le nombre des passages, beaucoup plus rapidement que sur les deux autres pistes; qu'il a augmenté aussi, mais dans un rapport beaucoup moindre sur la piste de la voiture n° 2, à jantes de $0^m,115$, et qu'enfin sur la piste de la voiture n° 1 il est resté stationnaire et n'a varié qu'en raison de l'état d'humidité de la route.

De plus, l'examen de l'état de la route, le relèvement des profils transversaux et la mesure du tirage, se sont accordés pour faire voir qu'après le transport d'un même poids de matières, la voiture n° 3, à jantes de $0^m,175$, chargée de 6992 kilogrammes, véhicule compris, avait produit beaucoup plus de dégradations que les deux autres voitures; que la voiture n° 2, à jantes de $0^m,115$, chargée de 4594 kilogrammes, en avait produit plus que la voiture n° 1, à jantes de $0^m,060$, chargée de 2408 kilogrammes; et que celle-ci n'avait produit aucune ornière ni aucun frayé apparent.

293. *Conséquences de ces expériences.* — Il semble donc que l'on doit conclure de ces expériences, faites sur des voitures exactement semblables sous tous les rapports, excepté sous celui de la largeur des jantes, et du chargement, qui était proportionnel à cette largeur, que *la propor-*

tionnalité des chargements aux largeurs de jantes, admise comme base des tarifs, est plus défavorable qu'utile aux routes.

294. *Expériences exécutées avec les mêmes voitures sous des charges égales.* — Deux expériences analogues ont été faites sur les mêmes voitures, chargées d'un poids égal de 5546 kilogrammes, véhicule compris, et sur trois pistes aussi identiques que possible et toujours entretenues très-humides par un arrosage abondant; on les a fait circuler jusqu'à ce qu'elles eussent transporté chacune 8 325 000 kilogrammes.

Le relèvement des profils, et surtout le résultat des expériences de traction, ont montré qu'à poids égal, sur les routes en empierrement de gravier, les roues de $0^m,060$ de jante produisent des dégradations notablement plus considérables que celles de $0^m,115$, mais qu'au delà de cette dernière largeur, il y a bien peu d'avantage, dans l'intérêt de la conservation des routes, à augmenter la dimension de la bande de roue.

295. *Expériences sur l'influence du diamètre des roues, sur les dégradations qu'elles produisent sur les routes* — Des expériences analogues ont été exécutées avec les mêmes voitures, auxquelles on a donné des roues d'une largeur commune de $0^m,115$, mais dont les diamètres ont varié de $0^m,872$ à $1^m,453$ et $2^m,029$, et que l'on a chargées d'un même poids, égal à 4930 kilogrammes. Les pistes parcourues par ces voitures avaient 200 mètres de longueur et elles ont été arrosées pendant la dernière partie de la durée des expériences.

L'examen de la route, le relèvement des profils et la mesure de l'intensité du tirage éprouvé par une même voiture sur les trois pistes après le transport de 9 995 720 kilogrammes sur chacune d'elles, ont montré que la piste parcourue par la voiture à petites roues de $0^m,872$ de diamètre était de beaucoup la plus dégradée; et que celle de la voiture à grandes roues de $2^m,029$ de diamètre était à peu près

intacte ; ce qui prouve avec évidence l'avantage considérable que présentent les grandes roues pour la conservation des routes.

296. *Influence de la vitesse sur les effets destructeurs.* — On s'est proposé de comparer les dégradations produites sur les routes par des voitures suspendues allant au trot, avec celles qu'occasionnent des voitures non suspendues allant au pas. [illegible] cet effet on a employé deux chariots exactement pareils, [illegible]lont l'un était suspendu, et dont l'autre, par le calage de [illegible] res[illegible] av[illegible] transformé en chariot non suspendu. Le ch[illegible]nt [illegible]es deux chariots fut fixé d'abord à 6000 [illegible] véhicule compris, puis à 5000 kilogrammes, [illegible]oute fut devenue trop mauvaise.

Le chariot suspe[illegible] au trot de $3^m,20$ à $3^m,60$ en $1''$, ou 11,52 à 1[illegible]es à l'heure, et le chariot non suspendu, au pa[illegible] à $1^m,20$ en $1''$, ou de 3,6 à 4,6 kilomètres à l'heure.

L'examen de la route, l[illegible]ment des profils et la mesure du tirage, ont montré [illegible] dégradations, comme l'accroissement du tirage sur les deux pistes, avaient été sensiblement les mêmes après le transport de 4650 000 kilogrammes environ sur chacune d'elles. Ces résultats ont complétement confirmé les expériences qui avaient été précédemment exécutées à Metz, et prouvent qu'en ne considérant que la conservation des routes, la loi ne doit pas imposer aux voitures suspendues allant au trot des limites plus restreintes qu'aux voitures de roulage allant au pas.

297. *Expériences comparatives sur les dégradations produites par les voitures comtoises, les charrettes et les chariots de roulage.* — L'on a admis longtemps que les voitures comtoises attelées d'un seul cheval et à jantes étroites dégradaient plus les routes que les gros chariots et les charrettes à jantes larges attelés de plusieurs chevaux ; et peu s'en est fallu, en 1837, que ces véhicules légers, si utiles,

et au moyen desquels on utilise si bien la force des chevaux, ne fussent à peu près supprimés. Les résultats des premières expériences sur l'influence de la largeur des jantes suffisaient déjà sans doute pour montrer dans quelle erreur on était; mais il ne m'en a pas moins paru utile de faire une série d'expériences directes sur des voitures du commerce, chargées dans les proportions d'usage.

A cet effet, je me suis procuré quatre chariots à jantes de $0^m,06$ de largeur, ayant des roues de devant de $1^m,11$ et des roues de derrière de $1^m,36$, tandis que les véritables chariots de Franche-Comté ont des roues dont les diamètres sont respectivement de $1^m,30$ et $1^m,45$, et sont dans des conditions plus favorables. Chacune de ces voitures pesait vide 625 kilogrammes, et chargée 1801 kilogrammes.

Une charrette à roues de $1^m,83$ de diamètre sur $0^m,165$ de largeur de bande, pesant vide 1025 kilogrammes et chargée 5009 kilogrammes, et un chariot à roues de $1^m,01$ et $1^m,73$ de diamètre sur $0^m,165$ de largeur de bande, pesant vide 3175 kilogrammes et chargé 7935 kilogrammes, ont été mis avec les voitures comtoises, en expérience sur trois pistes de 150 mètres de longueur, prises au même état et constamment arrosées.

Aux moyens d'observation employés dans les précédentes expériences on a joint la mesure des quantités de matériaux nécessaires pour la réparation des dégradations. De tous ces moyens réunis, il est résulté pour conséquences :

1° Que les voitures comtoises, après le transport d'environ 7 000 000 kilogrammes sur une piste toujours mouillée, avaient produit moins de dégradations que le chariot et la charrette ;

2° Que dans les mêmes circonstances le chariot à quatre roues en avait produit moins que la charrette.

Ces résultats prouvent d'une manière incontestable l'avantage de la division des poids sur des voitures à jantes étroites, et ils démontrent que le transport des lourds fardeaux doit être fait de préférence sur des chariots à quatre roues.

L'ensemble de toutes les conséquences que nous venons de rapporter justifie et développe donc celles que nous avons déduites des seules expériences de traction.

298. *Expériences ayant pour but de déterminer les chargements d'égale dégradation.* — Les recherches dont nous venons de rappeler succinctement les résultats, ayant prouvé que les bases, admises jusqu'alors dans les lois et règlements sur la police du roulage, étaient inexactes et incomplètes, il a fallu s'occuper de rechercher quels étaient les nouveaux rapports à établir entre les dimensions des roues, en diamètre et largeur, et les chargements, pour que tous les véhicules employés par l'industrie produisissent à peu près les mêmes dégradations sur les routes, ou, ce qui revient au même, les usassent également.

De nouvelles expériences ont été exécutées à Courbevoie en 1841, et leurs résultats ont servi de bases au projet de loi présenté aux chambres en 1842, et surtout au rapport de la commission de la chambre des députés, qui avait étudié la question avec un soin consciencieux.

Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans l'étude détaillée de ces recherches, qui sont plutôt relatives à une question de législation et d'administration publique qu'à la mécanique industrielle, et je me bornerai à renvoyer à la publication que j'en ai faite en 1842, sous le titre d'*Expériences sur le tirage des voitures et sur les effets destructeurs qu'elles exercent sur les routes.*

RÉSISTANCE DES FLUIDES.

299. *De la résistance des fluides.* — Lorsqu'un corps se meut dans une masse fluide, il en déplace nécessairement les molécules, en leur imprimant des vitesses qui sont en rapport avec la sienne propre, et l'on conçoit de suite facilement que l'inertie de ces molécules, ainsi mise en jeu, développe une résistance qui doit croître avec la vitesse du corps. Des effets analogues se produisent quand un corps en repos ou en mouvement est choqué par un fluide.

La manière dont les molécules fluides sont divisées à la rencontre du corps dépend beaucoup de la forme et des proportions de celui-ci, et l'on comprend que la résistance qui nous occupe doit varier notablement avec ces circonstances.

Cette question importante de physique mécanique a depuis longtemps occupé les savants les plus illustres, et l'on trouvera, dans l'introduction à la mécanique industrielle de M. Poncelet, une analyse complète de l'ensemble des recherches anciennes et modernes faites sur cette matière. Je ne me propose, dans ces leçons, que d'appeler l'attention sur les cas les plus importants pour la pratique.

300. *Considérations théoriques.* — Lorsqu'un corps de forme quelconque *mnpq* (fig. 70), se meut dans un fleuve suivant une direction xy, si l'on projette ce corps sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, il est facile de voir qu'en se mouvant d'une quantité élémentaire $e = mm'$, le corps déplacera un volume de liquide qui sera représenté par le produit Ae, obtenu en multipliant la

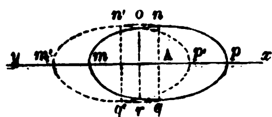


Fig. 87.

projection du corps sur le plan perpendiculaire au sens de son mouvement par le chemin parcouru. En effet, dans ses deux positions successives, le corps occupe dans le fluide le même volume, et dans chacune d'elles il y a une partie de ce volume qui n'a pas changé de position, c'est celle qui correspond à *mop'r*, de sorte que le volume antérieur *on'm'q'rm* est nécessairement égal au volume *onpqrp'*.

Il n'est pas moins évident que chacun de ces volumes est aussi égal au volume *nn'q'q*, engendré par la plus grande section transversale du corps ou par l'aire de sa projection A; car ces trois volumes élémentaires peuvent être considérés comme composés d'une infinité de petits prismes de même base, de même hauteur et de même nombre, dont les arêtes sont parallèles à la direction du mouvement et qui ne diffèrent que par leurs positions respectives.

Ainsi quand le corps parcourt par rapport au fluide, ou *vice versa*, quand le fluide parcourt par rapport au corps un chemin élémentaire e, le volume de fluide dévié, qui est obligé de passer de l'avant à l'arrière du corps, est exprimé par $q = \mathrm{A}e$ et sa masse est

$$q\frac{d}{g} = d\frac{\mathrm{A}e}{g},$$

en nommant d la densité ou le poids du mètre cube du fluide; cette masse déviée effectue son déplacement relatif avec une vitesse qui dépend essentiellement de celle du corps par rapport au fluide, dans le cas où c'est le corps qui se meut, et qu'il est naturel de supposer proportionnelle à cette vitesse. Il en sera donc de même de la force vive communiquée au fluide dévié; de sorte que, dans le cas d'un fluide en repos dans lequel se meut un corps animé d'une vitesse V, la force vive imprimée au fluide déplacé, pour un mouvement élémentaire du corps, sera proportionnelle à

$$\frac{d.\mathrm{A}e}{g}.\mathrm{V}^2$$

et si l'on appelle k le rapport inconnu, à déterminer par l'ex-

périence, de la force vive F, réellement imprimée au fluide, à celle que l'on vient d'exprimer, on aura

$$F = k.\frac{dAe}{g}V^2.$$

D'autre part, si l'on appelle R la résistance totale que l'inertie des molécules fluides oppose à leur déplacement, le travail de cette résistance pour le déplacement élémentaire e sera Re, et devra, d'après le principe général des forces vives, être égal à la moitié de la force vive communiquée au fluide déplacé. L'on doit donc, d'après ces considérations, avoir la relation

$$Re = \frac{1}{2}k.\frac{dAe}{g}V^2$$

d'où

$$R = kdA.\frac{V^2}{2g}.$$

Dans le cas où le fluide déplacé par le corps est animé d'une vitesse propre v, si le corps se meut en sens contraire du mouvement de ce liquide, la vitesse relative avec laquelle les molécules fluides sont rencontrées et déplacées par ce corps est $V + v$; et dans celui où les deux vitesses V et v sont dirigées dans le même sens, cette vitesse relative est $V - v$; un raisonnement analogue au précédent nous donnerait alors, pour le cas où le corps marche en sens contraire du fluide,

$$R = kdA\frac{(V + v)^2}{2g}$$

et s'il marche dans le même sens que le fluide,

$$R = kdA\frac{(V - v)^2}{2g}.$$

301. *Travail développé par seconde par la résistance du milieu.* — Lorsque toutes les circonstances du mouvement restent les mêmes, et que les phénomènes se reproduisent

constamment de la même manière, le travail développé dans chaque seconde par la résistance que le milieu oppose au mouvement du corps, est dans le cas cas d'un fluide en repos

$$RV = kdA\frac{V^3}{2g}$$

et dans le cas d'un fluide en mouvement

$$RV = kdA\frac{(V \pm v)^2}{2g}.V$$

Ce qui montre que, dans le premier cas, le travail de la résistance croît comme le cube de la vitesse.

302. *Expressions équivalentes de la résistance.* — Dans l'expression précédente de la résistance, appliquée aux liquides dont la densité d reste constante, dans le lieu où la valeur de $2g = 19{,}618$, on peut poser $\frac{kd}{2g} = K$, et elle prend alors la forme

$$R = K.AV^2$$

ou

$$R = K.A(V \pm v)^2,$$

sous laquelle on l'emploie souvent.

Quelques auteurs, et en particulier Dubuat, en appelant H la hauteur qui correspond à la vitesse relative V ou $V \pm v$, et en posant par conséquent $H = \frac{V^2}{2g}$ ou $H = \frac{(V \pm v)^2}{2g}$ et $K' = Kd$, écrivent cette formule de la résistance sous la forme

$$R = K'AH.$$

Il est d'ailleurs évident que ces trois formules sont équivalentes, et je n'indique les deux dernières qui rappellent moins l'idée de la loi de la résistance, que pour faciliter l'intelligence des ouvrages de quelques auteurs.

303. *Cas où le corps est en repos dans un fluide en mouvement.* — Si dans ce cas l'on suppose par la pensée que le corps en repos et le fluide reçoivent tous deux un mouve-

ment commun de transport, dont la vitesse soit précisément égale et contraire à celle du fluide, celui-ci se trouvera réduit au repos et ce cas sera ramené au précédent, ce qui montre que l'expression de la résistance doit être la même.

La considération des phénomènes physiques que présente le déplacement des molécules fluides situées à l'avant du corps, et la rentrée de celles qui affluent vers l'arrière pour remplir le vide formé par son passage, avaient conduit Dubuat à conclure que la résistance éprouvée par un corps en mouvement dans un fluide en repos, n'était pas la même que l'effort exercé sur le corps en repos par le fluide en mouvement, toutes choses étant égales d'ailleurs. Ce résultat serait contraire aux considérations précédentes, mais il a encore besoin d'être vérifié par des expériences; il paraît cependant s'accorder avec celles de M. Thibault sur la résistance de l'air, dont nous parlerons plus tard. Au surplus, la différence, si elle existe, doit dans beaucoup de cas de la pratique être assez faible pour pouvoir être négligée.

304. *Expériences sur la résistance de l'eau au mouvement des corps de diverses formes.* — Bien que ces expériences aient peu d'importance au point de vue industriel, qui est principalement celui de cet ouvrage, je rapporterai celles qui ont été exécutées à Metz en 1836 et 1837, principalement à cause des moyens d'observation employés.

Les corps soumis à ces expériences ont été :

1° Des plateaux minces en fer, de diverses étendues, qu'on faisait monter du fond de l'eau vers la surface par l'action d'un contre-poids;

2° Des sphères pleines ou creuses en fonte dont les diamètres ont été de $0^m,104$, $0^m,118$, $0^m,129$, $0^m,148$, $0^m,162$;

3° Des cylindres en fer-blanc peint, de hauteurs égales à leurs diamètres, qui ont été de $0^m,099$, $0^m,200$ et $0^m,300$;

4° Des cônes terminant des cylindres, de même diamètre et de même hauteur que les précédents, et dont les angles au sommet ont varié ainsi qu'il suit :

Demi-angles au sommet, 64°,48′; 46°,50′; 26°,1′; 18°,49′; 14°,19′,48″.

5° Des cylindres des mêmes dimensions que les précédents, et terminés antérieurement par des demi-sphères.

305. *Mode d'observation.* — Les expériences ont été exécutées sur la Moselle, en face du déversoir des Pucelles, en un endroit où l'eau était, au moins à la surface, à peu près sans vitesse, et où la profondeur était de 5 mètres. C'était le lieu le plus convenable qu'il nous ait été possible de trouver dans le voisinage.

Le mouvement vertical des corps était produit, quand ils descendaient, par leur propre poids, augmenté parfois d'un certain lest pour accroître la vitesse, et quand ils montaient, à l'aide de contre-poids. Dans tous les cas, la loi de ce mouvement était observée et déterminée au moyen d'un appareil chronométrique à style, le même qui avait servi aux expériences sur le frottement.

Dès les premières expériences, l'on reconnut de suite que la résistance de l'eau croissait si rapidement avec la vitesse, que le mouvement devenait très-promptement uniforme. Dès lors connaissant dans chaque cas la vitesse et le poids moteur, et en tenant compte des résistances passives, il a été facile de calculer la valeur de la résistance correspondante du fluide et d'en rechercher la loi.

La représentation graphique des résultats, en prenant les résistances pour abscisses, et les carrés des vitesses pour ordonnées, a montré que dans ce cas comme dans les précédents, la résistance se compose de deux termes, l'un indépendant de la vitesse et simplement proportionnel à la surface mouillée, l'autre proportionnel au carré de la vitesse; mais ici le premier terme est toujours assez faible pour pouvoir être négligé par rapport au second, dès que la vitesse atteint seulement 1 mètre par seconde.

D'après cela, la résistance opposée par l'eau aux corps

éprouvés dans ces expériences, serait simplement représentée par la formule

$$R = KAV^2$$

A étant la projection du corps sur un plan perpendiculaire au sens du mouvement.

Les valeurs du coefficient K déduites des expériences, sont consignées dans le tableau suivant :

Valeurs du coefficient K *de la formule* $R = KAV^2$.

CORPS EMPLOYÉS.				VALEURS de K.
				kil.
Plateaux minces (remontant de bas en haut verticalement).........				143,15
Sphères..				22,05
Cylindres droits, de hauteur égale à leur diamètre................				93,07
Cylindres de mêmes proportions, terminés par des cônes droits dont les hauteurs sont aux rayons de leur base dans le rapport de.................	0,94 à 1	angles au sommet correspondants.	64°48′	73,26
	1,89 à 1		46 50′	53,99
	4,05 à 1		26 1′	47,74
	5,92 à 1		18 49′	44,29
	7,66 à 1		14 19′48″	40,69
Cylindres des mêmes proportions, terminés par des sphères.......				40,71

306. *Observations sur ces résultats.* — La valeur du coefficient K trouvée dans ces expériences pour les plans minces, est considérable, et à peu près double de celle qui a été trouvée par Dubuat, en faisant marcher un plan vertical dans le sens horizontal, ce qui, en produisant un mode de déplacement de l'eau tout différent de celui qui avait lieu dans nos expériences, a pu causer cette divergence.

Il est remarquable que de tous les corps employés dans ces expériences, les sphères soient ceux qui offrent le moins de résistance, et que les cylindres terminés par des demi-sphères en éprouvent aussi moins que ceux qui le sont par des cônes aigus.

Ce résultat montre qu'au point de vue de la résistance du milieu la forme sphérique pour les projectiles, et la forme

demi-cylindrique donnée aux piles de pont, sont les plus favorables.

307. *Influence de l'acuité des angles des cônes sur la résistance.* — En comparant les valeurs des demi-angles au sommet des cônes, exprimés en fraction de la demi-circonférence, avec les valeurs de la résistance, on reconnaît que le coefficient K de cette résistance croît proportionnellement à ces angles, à partir d'une certaine valeur qui correspond à l'angle nul. Elle serait donnée par la formule

$$K = 31 + 120,83a,$$

a étant en fraction de la demi-circonférence la moitié de l'angle au sommet.

La comparaison des valeurs de K données par cette formule, et de celles que l'on a déduites directement de l'expérience, est établie dans le tableau suivant :

Comparaison entre les valeurs du coefficient K, *déduites de la formule et de l'expérience.*

DEMI-ANGLES AU SOMMET en fractions de la demi-circonférence.	VALEURS DU COEFFICIENT K, DÉDUIT de la formule.	de l'expérience.
	kil.	kil.
0,500	91,40	93,07
0,362	74,70	73,26
0,262	62,70	53,99
0,145	48,50	47,74
0,105	42,68	44,29
0,080	40,67	40,69

L'on voit qu'à l'exception de la série relative au cône dont le demi-angle au sommet était mesuré par un arc égal à 0,262 de la demi-circonférence, tous les autres résultats,

y compris même celui qui se rapporte à la base plane du cylindre, sont assez exactement représentés par la formule, ce qui permettra de l'employer pour les cas intermédiaires non étudiés.

308. *Expériences sur la résistance de l'eau au mouvement des projectiles.* — Sans entrer dans des détails qui ne seraient pas ici à leur place, je dois dire quelques mots des résultats remarquables des expériences que j'ai exécutées en commun avec MM. Piobert et Didion, à Metz, en 1836, sur la pénétration des projectiles dans l'eau.

Ces expériences ont été exécutées sur le bassin qui avait servi aux belles recherches d'hydraulique de MM. Poncelet et Lesbros, en tirant horizontalement et parallèlement au dessous de la surface du niveau, des projectiles qui pénétraient dans l'eau après avoir traversé un orifice formé par une volige de sapin. Un plancher horizontal, disposé au fond du bassin et garni de liteaux, recevait les projectiles, qui ne l'atteignaient jamais qu'avec une très-faible vitesse.

On a tiré ainsi des boulets pleins, du diamètre de $0^m,108$; $0^m,100$; $0^m,162$; et $0^m,220$; des obus des mêmes diamètres, d'épaisseurs et par conséquent de poids divers; les vitesses initiales des projectiles ont varié de 70 mètres à 500 mètres en 1''.

De l'ensemble de toutes ces expériences, dont les résultats sont consignés dans le numéro VII du *Mémorial de l'artillerie*, l'on conclut que la résistance de l'eau au mouvement de ces projectiles peut être représentée par la formule

$$R = 23,80\, AV^2 \text{ kilogr.},$$

tandis que les expériences citées plus haut (n° 305) nous ont donné

$$R = 22,05\, AV^2 \text{ kilogr.}$$

D'une autre part, d'anciennes expériences dues à Newton

et faites en observant la durée de la chute des sphères dans l'eau, conduisent à la valeur

$$R = 24,429AV^2 \text{ kilogr.},$$

et celles que Dubuat a exécutées en faisant tourner circulairement dans l'eau des sphères placées à l'extrémité du bras d'une sorte de manége, fournissent la formule

$$R = 22,05AV^2 \text{ kilogr.}$$

De l'ensemble de toutes ces recherches faites, par des procédés si divers et entre des limites si étendues, l'on peut conclure que dans les liquides, la loi de la proportionnalité de la résistance au carré de la vitesse s'applique pour les sphères jusqu'aux plus grandes vitesses.

309. *De la résistance de l'eau au mouvement des corps flottants.* — Les considérations théoriques précédentes s'appliquent aux bateaux qui naviguent sur la mer, sur les rivières et les canaux; mais les résultats sont influencés par diverses circonstances dont il est important de se rendre compte; les unes sont permanentes et les autres accidentelles.

310. *Influence de la forme des corps flottants.*— On conçoit facilement que quand un corps flottant pénètre dans un liquide et déplace, en les rejetant à droite et à gauche, les molécules fluides, la forme de l'avant-bec du bateau doit exercer une grande influence sur la facilité avec laquelle le fluide est dévié. De même aussi la forme de l'arrière, en facilitant plus ou moins le retour du liquide dans le vide formé par le passage, influe sur la différence de niveau qui existe de l'avant à l'arrière, et par conséquent sur la résistance.

Il est clair, à la simple inspection des figures 88 et 89, qu'un bateau dont les formes d'avant, dans les plans horizontaux, seraient telles que les filets fluides fussent d'abord

séparés par une arête à peu près verticale *a* (fig. 88), en forme de couteau, puis divisés latéralement par des courbes graduellement raccordées avec les flancs, éprouverait à s'introduire dans l'eau beaucoup moins de résistance qu'un bateau dont l'avant (fig. 89) serait simplement formé par des plans verticaux plus ou moins inclinés sur les flancs. Aussi la première forme est-elle celle que l'on donne aux bateaux rapides qui doivent naviguer sur les rivières ou sur les canaux, à l'aide de la vapeur ou des chevaux, et dont il sera parlé plus loin.

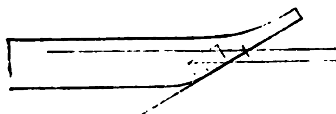


Fig. 88.



Fig. 89.

311. *Des bateaux à fond plat relevé à l'avant-bec.* — On emploie sur les rivières des bateaux dont l'avant-bec est formé par le prolongement du fond, qui se relève et s'incline à 25 ou 30° à l'horizon, en se rétrécissant notablement dans le sens horizontal. Cette forme est très-défavorable pour une marche rapide, pour laquelle il est vrai de dire que ces bateaux ne sont pas construits, et si elle est conservée sur les rivières, c'est qu'elle permet d'accoster les rives plus facilement et qu'elle diminue la violence des chocs contre des obstacles cachés par l'eau. Mais l'on ne conçoit guère qu'elle soit encore conservée pour les nacelles ordinaires à rames.


Fig. 90.

Il est facile de voir en effet (fig. 90), que la résistance de l'eau qui agit horizontalement, étant décomposée en deux forces, l'une tangente, l'autre normale à l'avant-bec, cette dernière tend à soulever l'avant et à incliner le bateau.

Cet effet a été très-sensible dans les expériences nombreuses que j'ai exécutées à Metz, en 1838, sur plusieurs bateaux de ce genre, parmi lesquels il y en avait un dont la

longueur pouvait varier par l'addition de rallonges ajoutées au corps. Ces expériences ont été faites dans le fossé de la courtine du fort Saint-Vincent, long de 300 mètres environ sur 30 de large, et ayant une profondeur d'eau qui a varié de 0^m,80 à 1^m,20. Pour faciliter diverses observations dont je parlerai plus tard, le mur d'escarpe de cette courtine avait été divisé en parties de 10 mètres de longueur marquées par des lignes verticales très-visibles.

Le mouvement du bateau était produit par la descente d'une caisse chargée de poids, suspendue au sommet d'une chèvre, équipée sur le parapet du bastion voisin par un cordage qui s'enroulait sur le plus petit diamètre d'un treuil à deux tambours. Sur le plus grand de ces tambours qui avait 2^m,57 de diamètre, tandis que le petit n'avait que 0^m,50, s'enroulait une ligne de halage de 300 mètres de long, dont l'extrémité était fixée au bateau par l'intermédiaire d'un dynamomètre à style.

Un observateur placé à l'avant et muni d'une montre à pointage donnant les dixièmes de seconde, observait les instants des passages devant les divisions équidistantes de l'escarpe, et déterminait ainsi la vitesse, en même temps qu'il gouvernait le dynamomètre.

Enfin, pour observer l'inclinaison du bateau et diverses autres circonstances de sa marche, on avait élevé aux deux extrémités de l'avant et de l'arrière des montants verticaux terminés par de petites lattes aa', bb' (fig. 91), mobiles autour d'une vis horizontale. Perpendiculairement à la direction de marche du bateau, et horizontalement à 1^m,60 environ au-dessus du niveau, on avait établi dans le fossé une planche bien fixe et portant à son bord inférieur un tasseau triangulaire c, dont l'arête bien horizontale était blanchie à la craie, tandis que les lattes aa' et bb' étaient noircies.

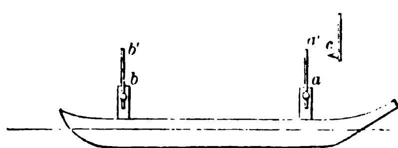


Fig. 91.

Avant de commencer les expériences, on amenait doucement le bateau sous le tasseau, et l'on repérait ainsi la hauteur de ce tasseau par rapport aux deux points du fond du bateau, correspondant aux lattes. Les deux hauteurs ainsi marquées étaient d'ailleurs égales ou à très-peu près, attendu que le bateau était chargé de manière à être horizontal au repos.

Cela fait, on ramenait le bateau à son point de départ et on commençait une expérience de marche. Il est facile de comprendre que les petites lattes mobiles venant successivement choquer le tasseau fixe et se rabattant au passage, elles conservaient l'empreinte du choc contre ce tasseau et donnaient ainsi la hauteur dont s'était soulevée ou abaissée chaque extrémité pendant le mouvement, dont la vitesse était d'ailleurs observée comme on l'a dit.

A l'aide de ce dispositif, il a donc été facile de comparer les inclinaisons prises par le bateau, pour les différentes vitesses dont il était animé, et de reconnaître aussi s'il se soulevait ou s'abaissait pendant la marche au-dessus de sa position au repos. Les expériences dont il est ici question ont été faites avec une nacelle, avec un bateau d'équipage de pont et avec un bateau à rallonges de $0^m,60$ seulement de largeur au fond et $0^m,70$ aux plats-bords, sur $0^m,80$ de profondeur, et pouvant avoir successivement $6^m,75$, $10^m,00$ et $10^m,25$ de longeur. Le tirant d'eau a varié pour ce dernier bateau de $0^m,280$ à $0^m,422$ et les vitesses de $1^m,85$ à $5^m,00$ en $1''$.

Un premier fait, signalé par les expériences entreprises sur ces bateaux, consiste en ce que l'aire de la plus grande section immergée pendant la marche, est généralement supérieure ou au moins égale à celle de la section immergée au repos. Le second, c'est que l'inclinaison de ces bateaux sur l'horizon augmente d'abord rapidement avec la vitesse, et qu'elle paraît ensuite croître moins promptement pour des vitesses qui varient avec la longueur du bateau et son tirant d'eau, mais qu'en somme elle va toujours en augmentant jusqu'à des vitesses de $5^m,00$, même pour un bateau dont la lar-

geur au fond n'est que $\frac{1}{17}$ de sa longueur; ce qui prouve combien cette forme est peu propre à la navigation rapide, et qu'elle devrait être abandonnée même pour les nacelles.

312. *Vitesse des ondes.* — Les corps flottants en se déplaçant forment une onde principale à laquelle M. J. Scott Russell, qui s'est beaucoup occupé de ces recherches et à qui l'on doit d'importantes améliorations dans la construction des bateaux destinés aux navigations rapides, a donné le nom de *grande onde* ou *onde solitaire*. Cette onde s'étale plus ou moins sur les côtés, selon que son point culminant est plus ou moins rapproché du milieu de la longueur du corps, et selon que le rapport de la largeur du bateau à celle du canal est plus grand. Sur les canaux ordinaires elle forme une intumescence dont le point culminant, quand il est placé vers le milieu de la longueur du bateau, s'élève à $0^m,20$ ou $0^m,30$ au-dessus du niveau général du canal; mais à mesure que ce point se rapproche de l'avant, l'onde se raccourcit et s'élève parfois à $0^m,90$ au-dessus du niveau du canal, formant ainsi une véritable proue fluide dans laquelle l'avant du bateau paraît enfoncé. On conçoit de suite que la forme, le développement et l'emplacement de cette onde doivent exercer une grande influence sur l'intensité et sur les lois de la résistance; c'est pourquoi il est important de s'en occuper.

M. J. Scott Russell a cru pouvoir déduire des observations qu'il a faites sur des canaux d'une profondeur peu variable que la vitesse de propagation de l'onde solitaire était toujours égale à celle qui correspond à la moitié de la profondeur d'eau dans le canal, augmentée de la hauteur de l'onde elle-même. Il en résulterait cette conséquence que pour qu'un bateau pût naviguer à une vitesse égale à celle de propagation de cette onde, ce qui est nécessaire pour qu'elle ait toujours la même position par rapport à la longueur du corps flottant et pour que la résistance suive une

loi régulière et normale, il faudrait que la vitesse de transport de ce bateau fût réglée d'après la profondeur d'eau dans le canal, ce qui ne permettrait pas la navigation rapide dans les eaux profondes.

En effet, la plus grande vitesse que l'on puisse obtenir des chevaux, exerçant un effort un peu considérable, n'atteint que difficilement $4^m,50$ à $5^m,00$ par 1″, ce qui correspond à des hauteurs de $1^m,07$ à $1^m,28$, et, par conséquent, selon la loi de M. J. Russell, à des profondeurs d'eau de $2^m,14$ et $2^m,56$, d'où il suit qu'au delà de ces profondeurs, la navigation de ces bateaux ne serait plus possible.

A l'inverse, sur les canaux peu profonds, la vitesse du bateau devrait être limitée de manière à faire perdre à ce genre de transport l'avantage de la rapidité.

Il m'a paru nécessaire de faire des expériences variées sur cette question préalable, et je les ai exécutées d'abord à Metz, en profitant des dispositions favorables qu'offrait le long fossé du fort Saint-Vincent et ensuite sur le canal de l'Ourcq.

Lorsque le bateau était en marche à une vitesse uniforme, on faisait cesser brusquement la traction; le mouvement du bateau se ralentissait, l'onde étalée sur ses flancs le dépassait en vertu de sa vitesse propre de propagation que l'on observait de la rive à l'aide de repères et d'un compteur à pointage donnant les dixièmes de seconde. On conçoit d'ailleurs que ces observations, dans lesquelles il était difficile de saisir le vrai moment du passage du point culminant de l'onde devant les repères, ne pouvaient être faites avec une très-grande précision.

L'on verra par les résultats cités dans le tableau suivant que, malgré la difficulté des observations, il y a entre les vitesses du bateau et celles de l'onde, aux diverses profondeurs et aux différents tirants d'eau, un accord suffisant pour que l'on puisse admettre que la vitesse de propagation de l'onde solitaire est sensiblement la même que celle du transport du bateau qui la produit.

Expériences sur la vitesse des ondes solitaires produites par les bateaux.

BATEAU AVEC UNE RALLONGE.		BATEAU AVEC DEUX RALLONGES.				BATEAU-POSTE.	
Tirant d'eau........... 0m,280 Profondeur d'eau......... 1m,20 Vitesse due à la moitié de cette profondeur........... 3m,44		Tirant d'eau........... 0m,280 Profondeur d'eau......... 0m,800 Vitesse due à la moitié de cette profondeur........... 2m,70		Tirant d'eau........... 0m,422 Profondeur d'eau......... 0m,800 Vitesse due à la moitié de cette profondeur........... 2m,700		Tirant d'eau variable. Profondeur d'eau......... 1m,44 Vitesse due à la moitié de cette profondeur........... 3m,76	
VITESSES		VITESSES		VITESSES		VITESSES	
du bateau.	de l'onde.	du bateau.	de l'onde.	du bateau.	de l'onde.	du bateau.	de l'onde.
m. 1,47	m. 1,51	m. 2,73	m. 2,93	m. 3,08	m. 2,92	m. 2,56	m. 2,76
2,60	2,58	3,29	3,50	3,05	3,10	3,56	3,23
2,76	2,80	4,03	4,00	3,60	3,64	3,40	3,70
3,40	3,33	3,80	3,89	3,65	3,69	3,93	3,78
3,59	3,41	4,93	4,51	4,45	4,27	3,82	3,85
3,35	4,59	5,00	5,00	4,55	4,82	4,09	4,22
4,55	4,71			4,74	4,81	4,35	4,00
				4,93	5,00	4,35	4,26

313. *Résultats des expériences sur la résistance des bateaux au halage.* — Après cet examen préliminaire des circonstances des phénomènes, faisons connaître les résultats des expériences directes sur l'intensité de la résistance par rapport à la vitesse de marche.

Toutes les expériences exécutées sur des bateaux à fond plat, de cinq formes ou proportions différentes, ont montré que, par suite de l'augmentation graduelle de l'inclinaison longitudinale du bateau, la résistance croissait beaucoup plus vite que le carré de la vitesse. Il y a plus, si, tenant compte de l'inclinaison observée, l'on détermine pour chaque cas la projection de la partie du bateau comprise sous le plan de flottaison sur un plan perpendiculaire au sens du mouvement, ce qui donne alors une aire du profil immergé, différente de celle qui avait lieu au repos, on trouve encore qu'en introduisant ce nouveau profil immergé dans la formule, le rapport de la résistance au carré de la vitesse ne reste pas constant, de sorte qu'il ne paraît pas possible d'assigner dans ce cas, aucune loi simple à cette résistance.

314. *Bateaux rapides.* — Mais lorsque l'avant-bec présente une proue tranchante à peu près verticale et des formes qui dévient convenablement le fleuve, à mesure que le bateau s'avance, la résistance suit des lois beaucoup plus régulières. Toutes les fois que la marche est bien réglée, que l'onde principale s'étale sur les flancs du bateau, de manière que celui-ci reste à peu près horizontal, les nombreuses expériences que j'ai exécutées sur plusieurs bateaux du canal de l'Ourcq, construits sur le modèle de ceux du canal de Paisley en Écosse, prouvent que, depuis les vitesses de halage obtenues par des hommes marchant au pas jusqu'à celles du galop, de $4^{m},50$ et plus, la résistance suit la loi du carré de la vitesse.

La représentation graphique des résultats des expériences, faite en prenant les carrés des vitesses pour abscisses et les efforts exercés pour ordonnées, montre que l'ensemble de

tous les points ainsi déterminés se trouve sur une ligne droite qui vient couper la ligne des ordonnées au-dessus de l'origine. Cette circonstance montre que, dans ce cas comme dans celui des roues à palettes planes, la résistance se compose de deux termes, l'un constant, indépendant de la vitesse et simplement proportionnel à l'aire de la surface mouillée, l'autre proportionnel au carré de la vitesse et à l'aire du profil immergé. Mais le premier terme est toujours assez faible pour pouvoir être négligé dans la pratique, surtout dans tous les cas où le bateau marche vite.

La figure 5, planche IV, qui représente l'ensemble des résultats des 1re, 2e, 5e, 6e, 9e, 10e, 13e, 14e, 15e et 16e expériences exécutées, en 1838, sur le canal de l'Ourcq, dans l'arrondissement de Meaux, offre un exemple de cette loi. On voit que l'ensemble de toutes les résistances mesurées par le dynamomètre, quand le bateau restait horizontal, est en effet représenté par une ligne droite qui vient couper l'axe des ordonnées ou des résistances en un point qui indique que la résistance constante était d'environ $7^{kil},60$. L'on remarquera sur cette figure un certain nombre de points marqués ainsi ⊙, et qui s'écartent trop de la ligne droite pour qu'ils n'indiquent pas qu'ils correspondent à des cas anormaux. En effet, tous ces points qui correspondent à des vitesses de $2^m,24$ à $3^m,3$ ou de petit trot, expriment des résistances observées, alors que, par le déplacement de l'onde, celle-ci se trouvait à l'avant du bateau qui était alors incliné et profondément immergé vers cette partie.

Le tableau suivant contient le résultat de toutes les expériences que j'ai exécutées sur le canal de l'Ourcq et sur le canal Saint-Denis avec trois modèles de bateaux. Les plus nombreuses sont relatives au modèle des bateaux rapides qui ont longtemps fait le service entre Paris et Meaux. Le tirant d'eau de ces bateaux a varié de $0^m,276$ à $0^m,425$, et leur déplacement de $5^{m.c.},726$ à $9^{m.c.},758$. Les expériences ont été faites à la remonte et à la descente, et l'on a comparé les résistances observées aux résultats de la formule $R = K_1A(V \pm v)^2$.

BATEAU employé.	PARTIE DU CANAL parcourue.	SENS du mouvement.	DÉPLACEMENT du bateau.	TIRANT D'EAU au maître-couple.	SURFACE DU PROFIL de la plus grande section immergée A.	SURFACE MOUILLÉE A'.	RÉSISTANCE indépendante de la vitesse K'A'.	RÉSISTANCE indépendante de la vitesse par mètre carré K'.	RÉSISTANCE par mètre carré et par mètre de vitesse.	OBSERVATIONS.
			tonn.	mèt.	m. q.	m. q.	kil.	kil.	kil.	
Bateau rapide du modèle employé sur le canal de Paisley en Écosse. (1er modèle.)	De Vignely à Meaux	Remonte	5,726	0,276	0,4160	31,7	6,70	0,212	10,9	$v = 0^m,30$ Longueur du bateau ... $22^m,70$ Largeur au maître couple ... 1 ,86 Creux du bateau 0 ,62 tonnes. Déplacement ... 2,250
	De Meaux à Vignely	Descente							10,9	
	De Vignely à Meaux	Remonte	7,147	0,335	0,5164	34,6	7,20	0,208	9,4	
	De Meaux à Vignely	Descente							9,9	
	De Vignely à Meaux	Remonte	7,368	0,350	0,5207	35,5	7,50	0,212	10,0	
	De Meaux à Vignely	Descente							10,5	
	De Vignely à Meaux	Remonte	7,932	0,370	0,5278	36,5	7,60	0,208	10,1	
	De Meaux à Vignely	Descente							10,1	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	6,989	0,330	0,5042	34,3	7,20	0,210	10,8	$v = 0^m,25$
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							10,8	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	7,731	0,362	0,5479	35,5	7,50	0,211	10,2	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							9,5	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	8,150	0,375	0,6021	36,8	7,70	0,209	10,4	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							10,1	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	9,758	0,425	0,6550	39,5	8,30	0,210	10,6	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							10,5	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	7,600	0,357	0,5457	35,9	7,60	0,211	10,90	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							11,70	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	7,280	0,352	0,5212	35,9	7,60	0,211	11,70	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							11,20	
	De la gare circulaire à celle de Bondy	Remonte	8,158	0,375	0,6021	36,8	7,70	0,209	9,4	
	De la gare de Bondy à la gare circulaire	Descente							9,4	
						Moyennes		0,210	10,43	
	Canal Saint-Denis		8.158	0,375	0,6021	36,8	7,90	0,214	13,10	
			6,760	0,334	0,5130				14.50	
						Moyennes			13,80	

315. *Conséquences de ces expériences.* — De l'ensemble de ces résultats l'on peut déduire que la résistance au halage, du bateau essayé sur le canal de l'Ourcq, est représentée avec toute l'exactitude que la pratique peut désirer par la formule

$$R=0,210A'+10,43A(V\pm v)^2;$$

et si l'on néglige le terme 0,210A', indépendant de la vitesse, qui ne s'élève guère qu'à 7 ou 8 kil., cette formule peut se réduire à

$$R=10,43A(V\pm v)^2.$$

Cette valeur de la résistance au halage, des bateaux le plus favorablement construits, dans les canaux étroits de faible profondeur, est beaucoup plus considérable que celle qu'éprouvent les bâtiments à la mer dans des eaux profondes, et qui, d'après les estimations ordinaires des ingénieurs de la marine, paraît correspondre à une valeur du coefficient K', égale à 3 ou 4 kilogr., par mètre carré d'aire du maître-couple pour la vitesse de 1^m par seconde.

316. *Variations accidentelles de la résistance.* — Les résultats qui précèdent se rapportent aux cas où la navigation avait lieu à l'état normal, sans perturbation notable dans l'emplacement de l'onde sur les flancs du bateau, qui conservait ainsi une position à peu près horizontale. Mais quand, par accident, les chevaux diminuaient leurs efforts et leur vitesse, le mouvement du bateau se ralentissait momentanément; l'onde, qui avait une vitesse de propagation égale à la vitesse précédente du bateau, s'avançait vers l'avant-bec d'un mouvement différentiel, et en même temps elle se raccourcissait de plus en plus, soulevait l'avant qui s'y trouvait plus profondément plongé, inclinait le bateau, et arrivait ainsi vers l'avant-bec, formant une sorte de montagne aqueuse de 2 mètres environ de base sur $0^m,80$ à $0^m,90$ de hauteur.

On conçoit facilement que, dans des circonstances si anormales, la résistance devait augmenter, quoique la vitesse

eût diminué, et qu'alors il était vrai de dire *que la résistance au petit trot était plus grande qu'au grand trot ou au galop.* Les résultats suivants montrent en effet combien l'emplacement de l'onde exerce d'influence sur l'intensité de la résistance, à vitesse égale.

Comparaison de la résistance au halage des bateaux-poste, quand l'onde est étalée sur les flancs ou quand elle est placée vers l'avant.

DÉPLACEMENT du bateau.	PORTION du canal parcourue.	VITESSE.	RÉSISTANCE au halage lorsque l'onde est vers le milieu du bateau.	RÉSISTANCE au halage lorsque l'onde est vers l'avant.
tonnes.		m.	kil.	kil.
5,716	De Meaux à Vignely........	2,50	68	100 à 120
7,147		4,30	96	180 à 200
	De la gare circulaire	1,90	50	120
7,731	à	2,00	60	115
	la gare de Bondy (remonte).	4,10	45	177
9,758	Id.	1,90	80	135
8,758	De la gare de Bondy à la gare	4,40	114	191
	circulaire (descente).	4,54	120	184
		4,20	109	279
8,758	Id.	4,40	121	276
		4,51	127	272
		4,62	134	256

L'on voit par ces résultats de quelle importance il est dans cette navigation de maintenir une marche régulière, et c'est précisément parce que l'allure du petit trot est moins stable, plus sujette à variations que les allures très-vives, que, les perturbations dans l'emplacement de l'onde se produisant plus souvent à cette allure lente, on a pu dire que la résistance était alors plus grande qu'à celle du galop. Mais cela n'est vrai que pour les cas où la perturbation que nous ve-

nons de signaler se produirait, et ne l'est nullement quand elle n'a pas lieu.

L'on a dit de plus que dans ces circonstances exceptionnelles où l'onde est tout à fait à l'avant du bateau, la résistance allait toujours en croissant, de sorte que cette onde ne pouvait être franchie pour replacer le bateau dans sa position normale; cela n'est pas exact. Il m'est arrivé plusieurs fois, lorsque le bateau chargé de 9,670 tonnes y compris son poids propre, avait soulevé à l'avant une onde de $0^{m},90$ de hauteur, et après avoir parcouru dans cette situation extraordinaire une longueur de 200 à 300 mètres, de dépasser l'onde et de ramener le bateau à sa position horizontale, et l'onde au milieu de la longueur du bateau. Alors il était vrai de dire que la résistance était moindre à la vitesse de 5 mètres qu'à celle de $4^{m},22$; car à la première le bateau, marchant horizontalement, n'éprouvait en descendant de Bondy à la gare circulaire, qu'une résistance de 150 kilogr., tandis qu'à la seconde, quand son avant était plongé dans l'onde, il en éprouvait une de 280 kilogr. Mais cette différence tenait évidemment à celle des circonstances du phénomène.

317. *Résumé.* — L'on voit par ces expériences au sujet desquelles il m'a paru utile d'entrer dans quelques détails, que quand la forme des bateaux est convenablement déterminée pour que leur position relativement à la surface du niveau ne varie pas sensiblement, la résistance suit la loi du carré de la vitesse, et que par conséquent la fatigue des chevaux employés au halage rapide doit être très-considérable. Aussi est-on obligé de diminuer beaucoup la longueur des relais, et, malgré cette précaution, perd-on encore un grand nombre de chevaux.

318. *Du travail développé par les chevaux dans le halage des bateaux rapides.* — Il suit en effet des expériences ou de la formule qui en exprime les résultats, qu'en supposant que le bateau porte seulement 60 passagers et marche, par exemple, dans l'arrondissement de Meaux où la vitesse v de

l'eau est $v = 0^m,30$, à la vitesse de $4^m,20$ en $1''$, ou de 15 kilomètres à l'heure à la remonte, et à celle de $4^m,30$ par seconde ou de 15,48 kilomètres à l'heure à la descente, la résistance totale surmontée par les trois chevaux serait, puisqu'alors $A = 0^m,605$,

à la remonte, $R = 10,43 \times 0,605 (4^m,20 + 0^m,30)^2 = 127^{kilog},72$;
à la descente, $R = 10,43 \times 0,605 (4^m,30 - 0^m,30)^2 = 100 \quad ,96$;

ou par cheval :

à la remonte, $42^{kilog},59$;
à la descente, $33^{kilog},32$.

Par conséquent le travail développé par chaque cheval en $1''$ est en moyenne, dans ce cas,

à la remonte, $42^{kil},59 \times 4^m,20 = 172^{k \cdot m},88$
à la descente, $33^{kil},32 \times 4^m,20 = 143^{k \cdot m},18$.

Or, d'après des résultats d'expériences directes sur le travail développé par les chevaux employés à d'autres modes de transport, et dont quelques-uns sont insérés dans le tableau suivant, on voit que les chevaux employés au halage des bateaux rapides développent par seconde, pendant leur service, une quantité de travail plus que triple en moyenne de celle du cheval de roulage, et égale à une fois et demie celle du cheval de diligence, ce qui leur occasionne une fatigue excessive qui donne lieu à des maladies de poitrine dont ils meurent presque tous.

Dans les circonstances exceptionnelles où l'onde est à l'avant, nous avons dit qu'à une vitesse de $4^m,22$ la résistance avait été trouvée parfois égale à 280 kilog., ce qui exigeait de chaque cheval un effort de $93^{kil},33$ et le travail excessif de $93^{kil},33 \times 4^m,22 = 393^{k \cdot m},85$ en $1''$, pendant un temps qui a duré parfois plus d'une ou deux minutes, d'où résultent des efforts de jarrets et d'autres accidents.

Travail journalier développé par les chevaux employés à divers modes de transport.

MODE de transport employé.	EFFORT MOYEN par cheval.	VITESSE moyenne de marche.	TRAVAIL développé en 1" par cheval.	DISTANCE parcourue par jour.	TRAVAIL journalier.	OBSERVATIONS.
	kil.	m	kilom.	m.		
Chariot comtois......	$\frac{1800}{28,6}=63$	1,00	63,0	40 000	2 520 000	Résultats des expériences sur le tirage des voitures.
Chariot ordinaire.....	$\frac{1250}{28}=44,8$	1,00	44,8	40 000	1 792 000	
Charrette...........	$\frac{2500}{37,7}=66,5$	1,00	66,5	40 000	2 660 000	
Diligence...........	$\frac{750}{19}=39,5$	3,00	113,4	32 500	1 264 000	
Halage au pas........	remonte 52,5	0,80	42,0	25 840	1 356 600	Expériences sur les bateaux accélérés du canal de l'Ourcq.
	descente 38,09	1,20	46,7	25 840	984 246	
					1 762 807	

319. *Observation sur le travail journalier des chevaux.* — Ces exemples montrent combien le travail développé par les moteurs animés peut varier, mais en même temps ils font voir que quand on exige pendant un temps assez court un travail exagéré, ce n'est qu'au prix d'un sacrifice sur le travail journalier que l'on peut l'obtenir des animaux, sans les fatiguer outre mesure, ou les ruiner promptement. Ainsi dans le service du bateau-poste de Paris à Meaux, la distance parcourue à chaque relai était en moyenne de 3772 mètres, que les chevaux fournissaient deux fois par jour à la remonte, et deux fois à la descente, par conséquent, d'après les valeurs précédemment trouvées pour la résistance, le travail journalier d'un cheval, dans l'arrondissement de Meaux, était :

à la remonte,	$42^{kil},3 \times 2 \times 3\,772^{m}$	$= 319\,790^{k.m}$.
à la descente,	$33,32 \times 2 \times 3\,772$	$= 251\,366$
	Total,	$571\,166^{k.m}$.

Mais comme chaque relai était monté avec quatre chevaux, dont un se reposait tous les quatre jours, le travail moyen journalier n'était que les 0,75 du résultat précédent, ou égal à

$$427,367^{k.m};$$

tandis que le tableau du nº **318** nous montre que par les autres modes de transport et sans une fatigue excessive qui ruine rapidement les chevaux, on peut obtenir en moyenne d'un cheval de trait un travail journalier de 1 762 807 kilogrammètres, c'est-à-dire un travail quadruple de celui que fournissaient, avec des pertes considérables, les chevaux employés au halage des bateaux-poste du canal de l'Ourcq.

320. *De la résistance de l'eau au mouvement des roues à palettes planes.* — L'on emploie, pour transmettre le mouvement aux bateaux à vapeur, des roues à palettes planes qui, en choquant et pressant l'eau, éprouvent une résistance qui devient précisément la puissance motrice à l'aide de laquelle le bateau marche. Des expériences directes pour reconnaître

les lois et déterminer l'intensité de cette résistance m'ont paru nécessaires, et j'en ai exécuté, en 1837, plusieurs séries dont je vais donner l'analyse succincte.

Pour ces expériences l'on a employé deux modèles de roues; l'un, de $1^m,01$ de diamètre aux couronnes, recevait à volonté des palettes, en nombre variable, jusqu'à vingt au plus. Les palettes employées sur cette roue ont eu successivement pour dimensions

en largeur, parallèlement à l'axe,	$0^m,100$; 0,200; 0,300; 0,600;
dans le sens du rayon,	$0^m,100$; 0,201; 0,350; 0,201;

L'arbre de la roue formait un treuil autour duquel s'enroulait une corde, qui allait passer au sommet d'une chèvre, à 17 mètres de hauteur, et qui supportait une caisse dans laquelle on plaçait des poids moteurs.

La roue était établie sur une charpente fixe et l'on faisait varier les profondeurs d'immersion à volonté, en élevant ou en abaissant le niveau du bassin sur lequel on opérait et qui avait des dimensions en quelque sorte indéfinies par rapport à celles de la roue.

Les vitesses de rotation de cette roue ont varié depuis les plus faibles auxquelles il ait été possible d'observer un mouvement régulier jusqu'à 6 mètres par seconde. Elles étaient observées, quand le mouvement était devenu uniforme, à l'aide d'un compteur à pointage de Bréguet, donnant les dixièmes de seconde.

Tout l'appareil était disposé pour que les résistances passives provenant du frottement des axes, de la roideur de la corde et du déplacement de l'air, fussent atténuées autant que possible, et l'on en a tenu compte, dans le calcul des résultats, par des formules simples qu'il serait superflu d'exposer en détail.

La deuxième roue employée avait $2^m,612$ de diamètre extérieur et des palettes de $0^m,70$ de largeur dans le sens de l'axe, sur $0^m,506$ dans le sens du rayon, dont elles suivaient la direction.

La profondeur d'immersion de ces palettes a été successivement de $0^m,506$, de $0^m,404$ et de $0^m,286$.

Pour chaque nombre de palettes et chaque profondeur d'immersion l'on a fait varier graduellement les poids moteurs et par conséquent les vitesses, de manière à avoir des séries d'expériences dans lesquelles un seul élément fût variable.

Ayant ainsi pour chaque cas les valeurs de la résistance, correspondant à différentes vitesses, on a représenté graphiquement tous ces résultats en prenant pour abscisses les poids moteurs et pour ordonnées les carrés des vitesses du point milieu de la portion immergée.

Dans toutes les séries ainsi représentées l'on a reconnu que jusqu'à certaine vitesse, que nous ferons connaître plus loin, les points déterminés étaient toujours (fig. 92) sur une ligne droite que venait couper la ligne des abscisses en avant de l'origine, en un point O; variable pour chaque courbe, ce qui indiquait que l'abscisse ou la résistance, était dans chaque cas représentée, comme pour les bateaux, par une expression de la forme

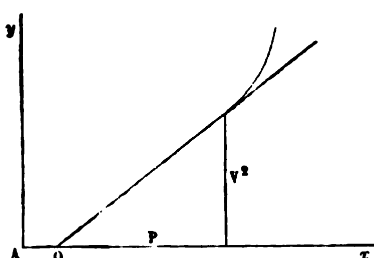


Fig. 92.

$$R = K_1'A + K_1AV^2,$$

en appelant toujours

A la surface immergée des palettes ;

V la vitesse du milieu de la portion immergée de palette;

K_1 et K_1' des coefficients constants.

La surface immergée A des palettes a été déterminée d'après le nombre de palettes simultanément immergées en totalité ou en partie, en calculant la somme des parties immergées de toutes les aubes pour plusieurs positions successives de la roue, et en prenant la moyenne des sommes des surfaces

ainsi obtenues. Elle représente ainsi réellement la valeur moyenne de la surface totale des palettes agissant sur l'eau.

Le mode de représentation de la figure 92 nous a donné la valeur du coefficient constant K_1', puisque l'abscisse AO du point O de la droite qui exprimait la loi de la résistance était celle du terme $K_1'A$. C'est ainsi que l'on a obtenu les valeurs suivantes :

DIMENSIONS des palettes, au nombre de 20.	SURFACE TOTALE immergée.	RÉSISTANCE CONSTANTE déduite du tracé, K'_1A.	RÉSISTANCE CONSTANTE par mètre carré, K'_1.
	m. q.	kil	kil.
0,20 sur 0,20	0,1365	0,130	0,953
0,30 sur 0,35	0,4345	0,400	0,901
0,60 sur 0,20	0,4110	0,390	0,951
		Moyenne.....	0,934

Le tracé a pu aussi fournir la valeur du coefficient K_1 du terme proportionnel au carré de la vitesse, puisque l'inclinaison de la droite qui exprime la loi de la résistance est donnée par l'expression

$$K_1A = \frac{R - K_1'A}{V^2},$$

$R - K_1'A$ étant la valeur des abscisses de cette droite diminuées de AO, et V^2 étant celles des ordonnées. En divisant dans chaque cas ces valeurs de K_1A, données par l'expérience, par la surface connue A, l'on en a déduit les valeurs du coefficient K_1.

321. *Causes qui altèrent la loi de la résistance.* — Mais avant de donner les valeurs du coefficient K_1 de la résistance, fournies par l'ensemble des expériences, il importe de signaler une circonstance qui, en altérant les conditions des phénomèmes, exerce sur les résultats une influence considérable. Pour qu'à différentes vitesses et à différentes

profondeurs d'immersion, la roue et ses aubes se retrouvent dans des conditions comparables, il faut, ainsi que nous l'avons implicitement admis jusqu'ici, que le vide formé par les palettes qui ont chassé devant elles l'eau sur laquelle elles ont agi, soit incessamment rempli, afin que les nouvelles palettes immergées rencontrent la même résistance. Or, en observant le mouvement de rentrée de l'eau dans le vide, on comprend très-bien que le remplissage doive se faire par une sorte d'écoulement de superficie ou en deversoir par les côtés, et qu'un certain temps est nécessaire pour qu'il soit opéré. Si donc la roue marche si rapidement que ce vide n'ait pas le temps de s'emplir, les palettes ne trouvant plus la même quantité d'eau à refouler qu'à des vitesses moindres, les circonstances du phénomène sont changées, et dès lors la loi de la résistance doit se trouver modifiée. Cette altération croissant de plus en plus avec la vitesse, il arrive que

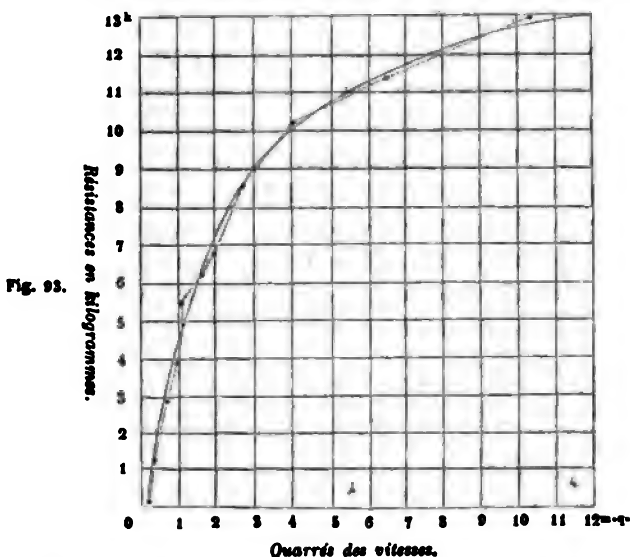


Fig. 93.

les palettes rencontrent une quantité de liquide de plus en plus faible, et qui peut, pour ainsi dire, être nulle, de sorte qu'à la fin la roue tourne dans l'air au lieu de tourner dans l'eau.

retranchant la vitesse v du courant : de sorte que l'expression générale de l'effort exercé sur l'eau stagnante ou courante, par les aubes d'une roue à palettes planes, serait

$$R = A\{0^{kil},934 + 109,20(V \pm v)^2\},$$

en prenant pour coefficient du second terme le nombre qui convient le mieux à l'ensemble des expériences.

325. *Influence de la présence d'un bateau près des roues.* — Les expériences dont il vient d'être question ont été faites sur des roues isolées dans le liquide sur lequel elles agissaient, et il était bon de reconnaître si la présence d'un bateau près de la roue pouvait exercer quelque influence sur l'intensité et la loi de la résistance.

A cet effet l'on a placé près de la roue, à $0^m,04$ de distance, parallèlement au plan vertical extérieur des aubes de la roue de $2^m,612$ de diamètre, un bateau immergé d'une quantité égale à celle dont les aubes plongeaient dans le liquide, et l'on a fait deux séries d'expériences, aux profondeurs d'immersion de $0^m,404$ et $0^m,256$, pour en comparer les résultats à ceux des séries faites dans le cas où la roue était isolée et où ses palettes étaient immergées de $0^m,404$ et de $0^m,286$.

Les résultats de ces expériences semblent montrer que, par suite de l'obstacle que la présence du bateau oppose au retour de l'eau dans le vide formé par les palettes, la résistance diminue un peu, mais d'une quantité si faible qu'elle rentre dans les limites des erreurs d'observation. En effet, on a trouvé :

A la profondeur d'immersion de $0^m,404$	sans bateau	$K_1 = 114,00$
	avec bateau	$K_1 = 112,50$
A la profondeur d'immersion de $0^m,286$	sans bateau	$K_1 = 126,00$
— de $0\ ,256$	avec bateau	$K_1 = 113,38$

L'on voit donc que la formule précédente déduite de l'ensemble des expériences peut encore s'appliquer au cas où la roue est placée sur le flanc d'un bateau à vapeur.

326. *Application aux roues des bateaux à vapeur.* — La formule de la résistance éprouvée et de l'effet transmis par les aubes d'une roue qui tourne dans l'eau, étant

$$R = K_1 A U^2 = 112{,}15\, A U^2,$$

quand l'axe de cette roue n'a aucun mouvement de translation, il est clair que si cet axe est porté sur un bateau à vapeur qui avance avec une vitesse V, les aubes ne choqueront le liquide qu'avec la vitesse U — V, et que dans ce cas la formule qui exprimera cette résistance, éprouvée par les aubes, sera

$$R = K_1 A (U - V)^2$$

dans une eau tranquille, et qu'enfin si le bateau qui porte la roue remonte ou descend un courant animé d'une vitesse v, l'expression de la résistance deviendra

$$R = K_1 A (U - V - v)^2 \text{ à la remonte}$$

et $$R = K_1 A (U - V + v)^2 \text{ à la descente.}$$

Si nous examinons en particulier le cas de la navigation en eau tranquille, le travail de cette résistance, ou celui qui sera produit par la machine que fera mouvoir la roue en 1″, sera

$$R U = K_1 A (U - V^2)\, U^{k \cdot m},$$

et si on l'exprime en chevaux de 75 kilogrammètres, la force effective du moteur sera

$$\frac{RU}{75} = N = \frac{K_1 A (U - V)^2 U}{75}.$$

L'observation des constructions existantes peut permettre de reconnaître si la valeur du coefficient K_1, que l'on déduit des expériences que l'on vient de rapporter, s'accorde avec les faits observés dans la navigation.

En effet, l'on a pour chaque bâtiment les dimensions des roues et des aubes, le nombre de celles-ci, d'où l'on peut déduire la surface immergée des palettes; l'observation donne la vitesse U des aubes, qu'à cause de leur peu de hauteur par rapport au rayon des roues, l'on peut regarder comme le point

d'application de la résistance, ainsi que la vitesse V de marche du bateau, et si l'on introduit la valeur de $K_1 = 112,15$, déduite de nos expériences, la formule ci-dessus doit donner la force effective de la machine, telle que l'observation l'a fournie.

Les expériences directes faites par le halage sur point fixe, en donnant l'effort exercé et transmis par les aubes pour faire avancer le bateau, permettent de vérifier directement la formule

$$R = 112,15\, AU^2,$$

en y introduisant les données particulières à chaque cas.

En faisant cette comparaison pour les bâtiments *le Sphinx*, *le Mentor* de 160 chevaux de force nominale, *la Médée* et *le Véloce* de 220 chevaux, pour lesquels les dimensions et les diverses vitesses sont données par M. Campaignac dans son ouvrage sur la navigation à vapeur, on a les données et les résultats suivants :

NOMS des bâtiments.	FORCE EN CHEVAUX de chacune des deux machines. N.		AIRE DE PALETTES immergée pour chaque roue. A.	VITESSE du milieu des palettes. U.	VITESSE DE MARCHE du bâtiment. V.	VALEUR du coefficient K_1.
	nominale.	effective.	m. q.	m.	m.	
Sphinx	80	80,851	3,830	6,094	4,630	120,81
Mentor	80	80,854	3,450	6,359	4,733	104,20
Médée	110	110,380	5,144	6,347	4,938	127,73
Véloce	110	111,350	3,988	6,385	4,861	141,21
					Moyenne K_1 =	120,05

L'on remarquera que la valeur de l'aire totale simultanément immergée des palettes, a été déterminée par des tracés, et en supposant l'aube verticale entièrement plongée, un peu au-dessous du niveau, mais probablement moins qu'elle

ne l'est en réalité, de sorte que les valeurs du coefficient K_1 sont sans doute plus grandes qu'elles ne devraient l'être. Il n'est donc pas étonnant que la moyenne de ces valeurs surpasse celle que nous avons déduite de nos expériences directes.

327. *De la résistance de l'air.* — Les phénomènes qui se produisent dans l'air lorsque des corps se meuvent dans ce milieu, sont tout à fait analogues à ceux que présentent les liquides, et la résistance qu'il oppose au mouvement de ces corps est du même genre. Cependant il convient de distinguer ce qui se passe dans le mouvement uniforme, de ce qui a lieu dans le mouvement varié.

Dans le premier cas, la vitesse restant la même, les molécules fluides, successivement déviées par le corps, éprouvent les mêmes déplacements, reçoivent les mêmes vitesses, et dans les différents instants de son mouvement, le corps éprouve la même résistance. Mais dans le mouvement varié, accéléré par exemple, les molécules fluides reçoivent des degrés de vitesse de plus en plus grands, et comme elles appartiennent à un fluide élastique, la proue fluide qui se forme en avant du corps acquiert une densité, et par suite une masse qui va sans cesse en croissant, d'où il résulte que la masse déplacée augmente en même temps que la vitesse qui lui est communiquée. On conçoit donc *à priori* que plus l'accélération $\frac{v}{t}$ du mouvement sera grande, plus la résistance croîtra, et dès lors on peut prévoir que dans le mouvement accéléré, l'expression de la résistance de l'air doit pouvoir comprendre, outre les termes ordinaires, un terme particulier dû à l'accélération même du mouvement. C'est du reste ce que des expériences faites à Metz en 1836, ont pour la première fois mis en évidence, comme on le verra plus loin.

328. *Résultats de l'expérience.* Le célèbre Borda a fait en 1763 des expériences sur les lois de la résistance de l'air, au moyen d'une espèce de volant à ailettes, dont l'axe était

vertical et dont les bras horizontaux avaient un peu plus de 2^{m},18 de longueur. A l'extrémité de ces bras, il fixait les surfaces et les corps de diverses formes sur lesquels il voulait opérer, et il observait la vitesse uniforme que ce volant prenait sous l'action de différents poids moteurs. Il a cru pouvoir négliger l'influence des frottements dans cet appareil, ce qui jette quelque incertitude sur les résultats, car il est difficile d'admettre que quand il s'agit d'une résistance aussi faible, la portion de l'effort moteur qui est nécessaire pour vaincre les frottements, ne soit pas comparable à celle qui surmonte la résistance de l'air.

Borda a successivement placé aux extrémités du bras de son appareil des surfaces carrées de 9, de 6 et de 4 pouces de côté, et les a fait mouvoir par des poids de 8, de 4, de 2 livres, d'une livre et d'une demi-livre, et par conséquent à des vitesses différentes. D'après les dimensions et les données relatives à son appareil, l'auteur a calculé les résistances de l'air correspondant aux différentes vitesses, et les résultats, exprimés en mesures métriques, sont résumés dans le tableau suivant :

Résultats des expériences de Borda sur la résistance de l'air.

SURFACE DE 9^{po} DE CÔTÉ ou de 0$^{m.q}$,059355.			SURFACE DE 6^{po} DE CÔTÉ ou de 0$^{m.q}$,02638.			SURFACE DE 4^{po} DE CÔTÉ ou de 0$^{m.q}$,011725.		
Résistances de l'air.	Vitesses.	Carrés des vitesses.	Résistances de l'air.	Vitesses.	Carrés des vitesses.	Résistances de l'air.	Vitesses.	Carrés des vitesses.
kil.	m.		kil.	m.		kil.	m.	
0,07570	3,463	11,99	0,0758	5,430	29,48	0,0722	8.278	68.52
0,03580	2,460	6,05	0,0379	3,840	14,75	0,0361	5.850	34,25
0,01890	1,730	2,99	0,0189	2,723	7,41	0,0181	4,120	16,97
0,00945	1,220	1,49	0,00945	1.912	3.66	0,00901	2,912	8.48
			0,00470	1,264	1,60	0,00151	2.060	4,25

Si l'on représente ces résultats graphiquement, en prenant les résistances pour abscisses, et les carrés des vitesses pour ordonnées, on trouve que tous les points relatifs à une même surface, sont situés sur une ligne droite, ce qui indique que la résistance croît comme le carré de la vitesse. Le peu d'étendue des surfaces employées par l'auteur n'a pas pu manifester d'une manière certaine l'existence d'un terme constant, dans l'expression de la résistance.

En comparant ces résultats avec la formule $R = K_1AV^2$, on trouve pour K_1 les valeurs suivantes :

Carré de 9 pouces ou de $0^m,243$ de côté, $K_1 = 0,1050$;
Carré de 6 pouces ou de $0^m,162$, $K_1 = 0,0955$;
Carré de 4 pouces ou de $0^m,108$, $K_1 = 0,0897$;

Il est à remarquer que Borda ayant négligé l'influence du frottement, qui croissait avec la résistance et avec les poids moteurs employés, la diminution apparente de la résistance pour les plus petites surfaces peut tenir à cette circonstance.

329. *Expériences de M. Thibault, sur les corps en mouvement dans l'air.* — L'on doit à cet officier, que la marine a perdu trop tôt, des expériences nombreuses et très-bien faites, publiées à Brest en 1823.

M. Thibault a employé pour ses expériences un volant à deux ailettes, tournant autour d'un axe horizontal, et mû par un poids qui lui imprimait un mouvement, que la résistance même de l'air rendait bientôt uniforme. Ce volant fort léger était composé d'un axe en acier de $0^m,65$ de long sur $0^m,005$ d'équarrissage, terminé par des tourillons de $0^m,0025$ de diamètre. Les bras du volant étaient formés chacun par une verge en fer de $2^m,736$ de longueur, de $0^m,014$ de largeur dans le sens du mouvement près de l'axe, et de $0^m,005$ aux extrémités, sur une épaisseur constante de $0^m,006$ dans le sens parallèle à l'axe. Le côté des bras qui frappait l'air était taillé en biseau.

330. *Observation relative aux régulateurs à ailettes et aux moulins à vent.* — Il en résulte que, dans les volants à ailettes employés comme régulateurs du mouvement, où les ailettes s'inclinent, tournent autour du rayon du volant, quand la puissance motrice est trop faible, l'on n'obtient une diminution de résistance qu'après que les ailettes ont dépassé l'inclinaison de 50 à 60°, et comme ces appareils régulateurs doivent servir aussi à empêcher l'accélération du mouvement quand la puissance motrice augmente, et doivent par conséquent alors offrir plus de résistance, il conviendrait qu'à l'état normal ces ailettes fissent un angle de 35 degrés environ avec le plan perpendiculaire au sens du mouvement.

Il ne me paraît pas impossible que quelque chose d'analogue se produise dans les moulins à vent dont les ailes, par quelque mécanisme spécial, s'inclinent quand le vent acquiert trop d'intensité. L'expérience montre, en effet, que cette disposition, qui a pour but d'empêcher la vitesse de s'accélérer beaucoup par l'effet des bourrasques, ne remplit pas tout à fait son but, et que tel moulin dont la vitesse normale est de 5 à 6 tours en 1 minute par une bonne brise de 5 à 6 mètres de vitesse en 1 seconde, atteint celle de 29 à 30 tours et plus par les grands vents.

331. *Expériences sur des surfaces de diverses formes.* — M. Thibault a successivement répété les mêmes expériences avec des surfaces concaves cylindriques; il est arrivé à la même conséquence, et il a constaté qu'à égalité de projection de la surface, sur un plan perpendiculaire au sens du mouvement, la résistance croît avec la courbure, mais assez lentement.

Quant aux surfaces creuses, à double courbure, telles que celles qui sont formées par des toiles fixées aux quatre côtés d'un cadre, la résistance croît aussi avec la courbure et plus rapidement que dans le cas précédent.

En comparant la résistance de deux surfaces de toile enverguées, de $0^{mq},1089$ de surface chacune, dont le côté in-

férieur pouvait se rapprocher du côté supérieur, comme cela arrive pour les voiles sous l'action du vent, à la résistance offerte par deux plans de même surface que la voile développée, l'auteur a trouvé que la résistance de la surface enverguée était la même que celle de la surface plane, malgré la diminution de la projection de la première surface sur la direction du mouvement. Il se fait ainsi une compensation entre l'augmentation de la résistance due à la courbure et la diminution due au rétrécissement de la surface projetée.

Cette conséquence est importante en ce qu'elle facilite beaucoup les applications relatives à l'action du vent sur la voilure des bâtiments.

332. *Influence de l'inclinaison des ailettes.* — L'auteur a reconnu que quand les ailettes sont inclinées de manière que l'axe de rotation se trouve en avant de leur plan, par rapport au sens du mouvement (fig. 94), la résistance diminue rapidement à mesure que l'inclinaison augmente, et qu'à l'inclinaison de 55° elle n'est guère que 0,5715 de la résistance perpendiculaire, tandis que quand l'axe de rotation se trouve en arrière du plan des ailettes, la résistance va en augmentant jusque vers l'angle de 55° (fig. 95), pour lequel elle est égale à 1,2293 fois la résistance perpendiculaire.



Fig. 94.

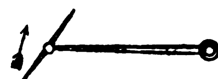


Fig. 95.

Ces résultats montrent que ce mode d'inclinaison des palettes des volants régulateurs se prête beaucoup mieux au but que l'on se propose, puisqu'en les disposant de façon que les ailettes puissent s'incliner à volonté, dans un sens ou dans l'autre (fig. 96), la résistance qu'éprouvera le volant sera rendue, selon le besoin, plus faible ou plus grande.



Fig. 96.

Les mêmes expériences, répétées sur des surfaces courbes,

inclinées à divers degrés, ont conduit à des conséquences semblables en indiquant un excès encore plus considérable dans l'intensité de la résistance, pour ces surfaces que pour les surfaces planes. Cela explique les avantages que la marine tire des mouvements de rotation imprimés aux voiles, parallèlement à l'axe des mâts.

333. *Influence du rapprochement des surfaces exposées à la résistance de l'air.* — M. Thibault a fait aussi quelques expériences pour reconnaître si deux surfaces égales, placées l'une derrière l'autre, à une assez faible distance, éprouvaient une résistance totale moins grande que si ces surfaces étaient isolées. A cet effet, il a monté sur son volant quatre ailettes placées deux à deux, l'une derrière l'autre, à une distance qu'il n'indique pas, et il a reconnu que, sur le cas où il opérait, la résistance de la surface postérieure n'était guère que les $\frac{4}{5}$ de celle de la surface antérieure. Ce résultat, qui peut s'appliquer aux trains de wagons de chemins de fer, est important, et il serait fort à désirer que des expériences plus complètes fussent faites à ce sujet.

334. *Influence de la forme des surfaces.* — Le même expérimentateur ayant placé aux extrémités de son volant diverses surfaces de même étendue, mais dont deux étaient carrées, deux circulaires et deux en forme de triangle rectangle, de façon que leur centre de figure fût dans tous les cas à la même distance de l'axe, il a reconnu que sous l'action d'un même poids moteur le volant prenait, dans tous les cas, la même vitesse, ce qui montre que la résistance est indépendante de la forme des surfaces planes expérimentées.

335. *Résistance de l'air au mouvement des corps sphériques.* — Ce cas particulier, qui intéresse spécialement l'étude du mouvement des projectiles dans l'air, a depuis longtemps appelé l'attention des physiciens et des géomètres. Newton le premier a fait à ce sujet des expériences, en observant la chute des corps sphériques. Hutton et d'autres observateurs

ont étudié cette résistance dans le cas des petites vitesses, à l'aide d'un appareil à rotation; et plus tard ce dernier, en comparant les vitesses des projectiles, à diverses distances de la bouche à feu, à l'aide du pendule balistique, a étendu ses recherches aux grandes vitesses. Enfin, dans ces dernières années, il a été exécuté à Metz de nombreuses expériences sur cette dernière partie de la question.

Nous nous bornerons ici à indiquer les résultats plus spécialement applicables aux questions industrielles.

De l'ensemble des expériences de Newton, sur la chute des globes de verre dans l'air, à des vitesses comprises entre 0 et $9^m,00$ par seconde à la température moyenne de 12° et à la pression de $0^m,75$, la valeur du coefficient K_1 est d'environ 0,0375, de sorte que la résistance éprouvée par les sphères mues dans l'air, à des vitesses comprises dans ces limites, serait

$$R = 0,0375\,AV^2 = 0,0375\,\frac{D^2}{1,273}\,V^2;$$

mais aux grandes vitesses le coefficient de la résistance augmente avec la vitesse et, d'après la discussion des expériences de Hutton et de celles de la commission des principes du tir de Metz, M. le général Piobert a proposé, pour représenter la loi de la résistance de l'air au mouvement des projectiles, la formule

$$R = 0,023,\,AV^2\{1 + 0,0023\,V\};$$

ce qui indiquerait qu'à ces vitesses l'expression de la résistance doit contenir un terme proportionnel au cube de la vitesse et que le terme constant n'a plus d'influence sensible.

330. *Expériences de Metz sur les corps en mouvement dans l'air.* — Nous avons exécuté à Metz de 1835 à 1837 pour un travail commun entre MM Piobert, Didion et moi, relatif à la résistance des fluides, de nombreuses expériences qui ont été plus particulièrement faites par M. Didion, et dans

lesquelles nous avons employé des appareils chronométriques analogues à ceux qui ont été décrits aux nos 225 et 77 pour observer la loi de descente dans l'air, des corps de diverses formes et d'étendues différentes. Ces expériences étaient faites dans l'ancienne fonderie de Metz où nous pouvions disposer d'une hauteur verticale de chute, de $14^{m},30$.

Les corps employés étaient suspendus à un cordon de soie enroulé sur une poulie qui, dans son mouvement, entraînait un style, dont la trace sur le plateau de l'appareil chronométrique, animé d'un mouvement uniforme connu et observé à chaque expérience, fournissait la loi du mouvement de descente du corps.

Des expériences spéciales ont été faites pour déterminer les résistances passives de l'appareil et en tenir compte dans les calculs.

Sans entrer dans une discussion détaillée des résultats et des vérifications auxquels ils ont été soumis, nous nous contenterons d'indiquer la marche suivie pour les calculs.

On a vu précédemment que les expériences sur la résistance de l'eau nous avaient déjà conduit à admettre dans l'expression de la résistance des fluides, l'existence d'un terme constant et celle d'un terme proportionnel au carré de la vitesse. Cette conclusion a été confirmée par les expériences que nous avons faites sur la résistance de l'air, en cherchant à obtenir des mouvements uniformes.

Une première série d'expériences faites sur un plan mince de $1^{mq},06$ de superficie nous a donné pour l'expression de la résistance de l'air

$$R = 0^{kil},036A + 0,089AV^2;$$

mais comme la chute de $14^{m},30$ ne suffisait pas pour que vers la fin le mouvement fût tout à fait uniforme et que, comme nous le verrons tout à l'heure, la résistance dans le mouvement varié doit comprendre un troisième terme dé-

pendant de l'accélération $\frac{v}{t}$ du mouvement, il s'ensuit que le terme $0{,}089\,AV^2$ qui comprend implicitement ce troisième terme est un peu trop fort et devra être diminué, comme on le dira plus tard.

L'existence du terme constant dans l'expression de la résistance a été aussi manifestée par les expériences exécutées sur la roue à ailettes de $1^m{,}00$ de diamètre intérieur, portant des ailettes carrées de $0^m{,}20$ sur $0^m{,}20$ de côté, au nombre de 20, présentant ainsi une superficie totale de $0^{mq}{,}80$. Les résultats de ces expériences ont été très-exactement représentés dans le cas du mouvement uniforme par la formule

$$R = 0^{kil}{,}0434\,A + 0{,}1002\,AV^2,$$

ainsi qu'on peut le voir par le tableau suivant dans lequel les valeurs trouvées, à différentes vitesses uniformes, pour le coefficient du terme proportionnel au carré de la vitesse, sont à peu près constantes.

Expériences sur la résistance de l'air au mouvement d'une roue à palettes planes.

Vitesse uniforme du centre de résistance des ailettes, en mètres par seconde.	m. 2,64	m. 3,76	m. 4,73	m. 5,39	m. 6,12	m. 6,58	m. 7,16	m. 7,57
Résistance des ailettes ramenée à la densité moyenne de l'air.	kil. 0,607	kil. 1,180	kil. 1,787	kil. 2,350	kil. 2,948	kil. 3,567	kil. 4,157	kil. 4,742
Coefficient K_1 du carré de la vitesse.	0,1027	0,1020	0,0998	0,0995	0,0976	0,1021	0,1007	0,1027
Moyenne K_1	= 0,1002							
Vitesse qui correspondrait à la formule.	m. 2,66	m. 3,76	m. 4,65	m. 5,33	m. 6.00	m. 6,61	m. 7,17	m. 7,62

Cette comparaison des résultats de l'expérience avec ceux de la formule ci-dessus, montre dans quelles limites d'exactitude celle-ci représente les effets réels.

337. ***Marche suivie pour tenir compte des effets de l'accélération.*** — Nous avons indiqué au n° **327**, comment, dans les fluides élastiques, la résistance pouvait dépendre de l'accélération du mouvement, et si ces considérations étaient admises, il en résulterait que la résistance de l'air dans les mouvements variés devrait être représentée par une formule de la forme

$$R = K_1'A' + K_1AV^2 + K_2A\,\frac{v}{t}.$$

Les expériences sur le mouvement uniforme ayant déjà fourni des valeurs approximatives des coefficients K_1' et K_1, il restait à trouver celle du coefficient K'_2 ou plutôt le terme $K_2A\,\frac{v}{t}$.

Sans entrer dans le détail des calculs qui ont été faits, nous nous bornerons à indiquer la méthode qui a été suivie, parce qu'elle montre un exemple remarquable du parti que l'on peut tirer de la représentation graphique de la loi des mouvements.

Dans le cas actuel, cette loi étant représentée par une courbe continue (fig. 97), dont les abscisses indiquaient les nombres des tours ou les espaces parcourus, et dont les ordonnées exprimaient les temps, il est clair que pour l'une de ces tangentes, MP par exemple, au point M de la courbe, le rapport de MP à MN, dans le triangle MNP, sera le même que celui de e à t, en représentant par e l'accroissement infiniment petit de l'abscisse pour passer du point M au point infiniment voisin M', et par t l'accroissement correspondant du temps ou de l'ordonnée : ce rapport $\frac{e}{t}$ du chemin élémentaire à l'élément de temps pendant lequel il a été parcouru, est précisément ce que l'on appelle la vitesse, ce que l'on exprime par la

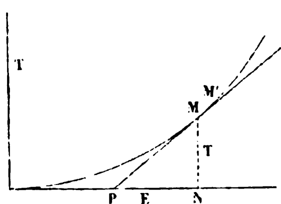


Fig. 97.

relation $V = \frac{e}{t}$, on voit que l'on a pu, à l'aide du tracé graphique de la figure 97, former une table des valeurs simultanées des temps et des vitesses, et par suite construire une nouvelle courbe dont les abscisses étaient les temps T et dont les ordonnées correspondantes étaient les vitesses V déterminées comme il vient d'être dit.

Cette nouvelle courbe (fig. 98), pourra se prêter à des considérations analogues; les tangentes, en ses différents points, feront connaître le rapport $\frac{AB}{BC}$, qui sera égal à l'accélération $\frac{v}{t}$, v étant l'accroissement élémentaire de l'ordonnée ou de la vitesse V, et t étant toujours l'accroissement élémentaire du temps.

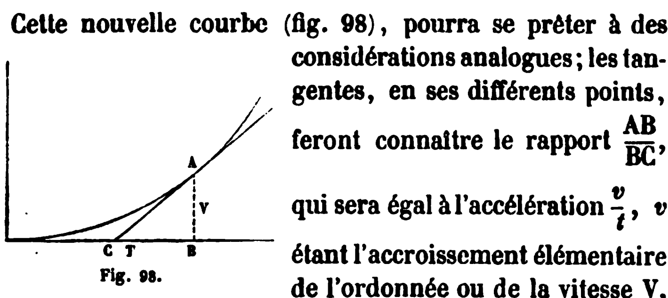


Fig. 98.

Par conséquent, connaissant à chaque instant la résistance totale R ou la portion de l'effort moteur employée à vaincre la résistance de l'air, ainsi que les coefficients K_1' et K_1, on a pu calculer le terme $K_2 A \frac{v}{t}$ et en déduire la valeur de K_2.

Cette manière de procéder peut être abrégée en n'opérant que sur la partie de la courbe relative à la fin de la chute, parce que les variations d'inclinaison des tangentes à la première courbe sont alors assez faibles pour qu'au lieu de les tracer, on puisse les déterminer par la valeur du quotient $\frac{E - E'}{T - T'}$, de la différence de deux espaces consécutifs divisée par celle des temps correspondants.

Je n'insisterai pas davantage et je me bornerai à dire que ce mode délicat et ingénieux de discussion a conduit M. Didion à assigner aux coefficients de la formule, qui représente la loi de la résistance de l'air au mouvement de descente accéléré d'un plateau de 1 mètre carré de surface, les valeurs suivantes :

$$R = 0^{kil},036 + 0,084V^2 + 0,164\frac{v}{t},$$

laquelle se réduit, dans le cas du mouvement uniforme, à

$$R = 0^{kil},036 + 0,084V^2$$

pour 1 mètre carré de surface.

338. *Vérification de l'exactitude de cette formule.* — Pour montrer *à posteriori* que cette formule composée de trois termes représente la loi de la résistance dans le mouvement accéléré avec plus d'exactitude que celles qui ne contiendraient qu'un terme proportionnel au carré de la vitesse ou deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel au carré de la vitesse, M. Didion a recherché d'abord quelles seraient les valeurs des coefficients constants qu'il conviendrait d'admettre pour chacune de ces formules, afin de les rendre aussi exactes que possible, et, après les avoir trouvées, il a calculé, par une méthode analytique assez simple, mais qui ne peut être donnée dans ce traité, les valeurs des temps correspondant à des espaces régulièrement croissants parcourus par le corps, telles qu'elles seraient fournies par ces formules, et il les a comparées aux temps réels fournis par les courbes de la loi du mouvement. D'après les résultats de cette comparaison, consignés pour un cas particulier dans le tableau suivant, l'on voit que la formule à trois termes de la résistance, représente très-bien la loi du mouvement accéléré de descente d'un corps dans l'air, tandis que la suppression du terme qui dépend de l'accélération $\frac{v}{t}$ ne permet plus de représenter cette loi aussi exactement, même en déterminant les coefficients, de manière à reproduire la durée calculée pour l'un des espaces, et qu'il en est de même si l'on supprime le terme constant.

Les seuls résultats insérés au tableau sont ceux de l'expérience n° 6, pendant laquelle la température de l'air était de 16°,8 centigrades, et la pression barométrique de $0^m,7516$ de mercure.

Comparaison des durées et des vitesses de la chute d'un plateau carré d'un mètre de côté, observées et calculées.

ESPACES PARCOURUS.	DURÉES OBSERVÉES.	VITESSES OBSERVÉES.	DURÉES CALCULÉES PAR LES FORMULES. (1) $R = 0^{kil},036 + 0,085\,V^2 + 0,164\frac{v}{t}$	(2) $R = 0^{kil},036 + 0,1077\,V^2$	(3) $R = 0^{kil},1347\,V^2$.	VITESSES calculées par la formule (1).
0^m,0914	0",176	»	0",178	0",160	0",160	»
0 ,1823	0 ,254	»	0 ,253	0 ,227	0 ,226	»
0 ,2742	0 ,306	»	0 ,310	0 ,278	0 ,277	»
0 ,3656	0 ,359	»	0 ,358	0 ,322	0 ,321	»
0 ,4398	0 ,400	»	0 ,400	0 ,360	0 ,358	»
0 ,5484	0 ,428	»	0 ,428	0 ,394	0 ,393	»
0 ,6398	0 ,474	»	0 ,473	0 ,419	0 ,417	»
0 ,7312	0 ,508	»	0 ,506	0 ,460	0 ,457	»
0 ,8226	0 ,537	»	0 ,536	0 ,488	0 ,487	»
0 ,9140	0 ,566	»	0 ,566	0 ,518	0 ,515	»
1 ,0990	0 ,619	»	0 ,622	0 ,570	0 ,567	»
1 ,2800	0 ,679	»	0 ,679	0 ,619	0 ,617	»
1 ,4620	0 ,725	»	0 ,723	0 ,665	0 ,663	»
1 ,6450	0 ,771	»	0 ,771	0 ,710	0 ,707	»
1 ,8280	0 ,815	»	0 ,820	0 ,748	0 ,746	3^m,15
2 ,7420	1 ,013	»	1 ,013	0 ,947	0 ,948	4 ,99
3 ,6560	1 ,187	5^m,55	1 ,186	1 ,123	1 ,120	5 ,53
4 ,3980	1 ,346	5 ,94	1 ,346	1 ,289	1 ,287	5 ,94
5 ,4840	1 ,493	6 ,32	1 ,497	1 ,452	1 ,451	6 ,27
6 ,3980	1 ,636	6 ,63	1 ,639	1 ,607	1 ,606	6 ,53
7 ,3120	1 ,771	6 ,86	1 ,776	1 ,760	1 ,760	6 ,74
8 ,2260	1 ,910	6 ,95	1 ,912	1 ,912	1 ,912	6 ,91
9 ,1400	2 ,084	6 ,97	2 ,042	2 ,062	2 ,064	7 ,04

339. *Influence de l'étendue des surfaces.* — Pour constater cette influence, M. Didion a employé un plateau carré de 0^m,50 de côté ayant par conséquent une superficie de $0^{m.q.}$,25 ou égale au quart de celle du premier plateau. En calculant la durée de la chute par la même méthode que pour le plateau de 1 mètre carré et à l'aide de la même formule

$$R = \left\{0^{kil},036 + 0,084V^2 + 0,164\frac{v}{t}\right\} A,$$

il a trouvé entre les résultats de l'observation et ceux du calcul une coïncidence très-suffisante pour permettre de conclure qu'entre les limites étendues, dans lesquelles il a opéré, la résistance de l'air est proportionnelle à l'étendue des surfaces. La température et la pression barométrique étaient sensiblement les mêmes que dans l'expérience rapportée au n° 338.

Comparaison des durées et des espaces parcourus dans la chute d'un plateau de 0m.q,25 de surface, d'après l'observation et le calcul.

ESPACES PARCOURUS.	DURÉES observées.	DURÉES calculées.
m. 0,091	0",174	0",173
0,183	0 ,246	0 ,242
0,274	0 ,301	0 ,297
0,366	0 ,356	0 ,343
0,440	0 ,387	0 ,384
0,548	0 ,425	0 ,420
0,640	0 ,460	0 ,454
0,761	0 ,490	0 ,485
0,823	0 ,519	0 ,515
0,914	0 ,547	0 ,543
1,823	0 ,775	0 ,767
2,742	0 ,951	0 ,939
3,656	1 ,102	1 ,085
4,398	1 ,240	1 ,215
5,484	1 ,361	1 ,330
6,398	1 ,476	1 ,412
7,312	1 ,586	1 ,527
8,226	1 ,693	1 ,646
9,140	1 ,799	1 ,738

340. *Conséquence de ces résultats.* — L'on voit par ce tableau que les durées des chutes calculées, sont sensiblement les mêmes, quoiqu'un peu plus faibles que les durées observées, ce qui montre que si le coefficient de la résistance variait avec l'étendue des surfaces, elle tendrait à diminuer

avec cette étendue plutôt qu'à augmenter, comme quelques auteurs avaient cru pouvoir le conclure d'expériences faites par l'observation du mouvement de rotation.

En résumé, l'on peut, sans crainte d'erreur notable, admettre dans la pratique que la résistance de l'air est proportionnelle à l'étendue des surfaces.

341. *Expériences sur les parachutes.* — Une des questions les plus utiles des recherches sur la résistance de l'air, que nos moyens d'observation nous permettaient de résoudre, était la détermination exacte de la résistance éprouvée par les parachutes que l'on emploie dans l'aérostation. Leur forme concave donnant d'ailleurs lieu, à surface égale, à un accroissement notable de résistance, il a été facile, dans ce cas, d'obtenir un mouvement de descente uniforme, ce qui était indiqué par la courbe qui représentait la loi du mouvement, laquelle dans ce cas dégénérait en une ligne droite dont l'inclinaison fournissait la valeur de la vitesse uniforme.

Le parachute employé était composé d'une carcasse formée de baleines, disposées dans quatre plans méridiens équidistants, assemblées sur une tige commune et assujetties par des arcs-boutants. Cette carcasse était recouverte d'un taffetas fortement tendu et elle était suspendue par une tige, à la partie inférieure de laquelle on attachait des poids additionnels.

Le diamètre extérieur du parachute était de $1^m,336$, mesure prise perpendiculairement aux côtés du polygone et de $1^m,200$, mesure prise entre les points les plus rapprochés des arcs formés par les bords. Sa projection perpendiculaire au sens du mouvement a varié de $1^{mq},1987$ de surface à $1^{mq},2073$. La flèche de courbure de ce parachute était de $0^m,430$ jusqu'au plan de l'extrémité des baleines.

La discussion des expériences dans lesquelles la vitesse a été uniforme, a montré que la résistance de l'air, au mouvement de ce parachute, pouvait aussi être représentée par

une expression composée de deux termes et qu'elle était égale à 1,936 fois celle d'un plan de même superficie, c'est-à-dire à peu près double.

Il en résulte qu'elle peut s'exprimer par la formule

$$R = 1,936\,A\,\{0^{kil},036 + 0,084\,V^2\} = A\,\{0^{kil},070 + 0,163\,V^2\}$$

à la densité et à la température ordinaires de l'air.

342. *Cas où le parachute présente sa convexité à l'air.* — En renversant ce parachute et le faisant descendre de façon que la surface convexe fût en dessous, on a trouvé une résistance beaucoup moindre et égale à 0,768 de celle de la surface plane de même aire. De sorte que dans ce cas la résistance est représentée par la formule

$$R = 0,768\,A\,\{0^{kil},036 + 0,084\,V^2\} = A\,\{0^{kil},028 + 0,0652\,V^2\};$$

on voit par là que la résistance du même corps varie dans le rapport de 1,936 à 0,768, ou de 2,5 à 1, selon qu'il présente à l'air sa concavité ou sa convexité.

343. *Cas où le mouvement du parachute était accéléré.* — L'on a encore reconnu dans ce cas la nécessité de joindre à l'expression de la résistance un terme dépendant de l'accélération $\frac{v}{t}$ du mouvement, et cette expression, pour le parachute employé, est

$$R = A\left\{0^{kil},070 + 0,163\,V^2 + 0,142\,\frac{v}{t}\right\}.$$

La comparaison des durées de chute observées avec celles que l'on déduit de cette formule a montré qu'elle représente les circonstances du mouvement avec toute l'exactitude désirable.

344. *Résistance au mouvement des plans inclinés dans l'air.* — Ces expériences ont été exécutées par des moyens analogues à ceux qui ont été indiqués ci-dessus, en faisant des-

cendre deux plans articulés, de 1 mètre de longueur sur $0^{m},50$ de largeur chacun, dont on faisait varier les angles de 5 degrés en 5 degrés, depuis 5 degrés jusqu'à 180, auquel cas ils formaient un seul plan. Les résultats régulièrement observés depuis 180 degrés jusqu'à 130 degrés, ont montré que la résistance décroissait proportionnellement aux angles, de sorte qu'en nommant *a* l'angle de l'un des plans avec la direction du mouvement, la résistance était exprimée pour le mouvement uniforme par la formule

$$R = \frac{a}{90} A \{0^{kil},036 + 0,084 V^2\}.$$

La comparaison des résistances observées avec celles qui seraient calculées par cette formule en montre l'accord satisfaisant.

Comparaison entre les résistances observées et les résistances calculées, pour des plans de diverses inclinaisons.

ANGLE FORMÉ par chacun des plans avec la direction du mouvement.	RÉSISTANCES rapportées à celles d'un plan perpendiculaire au sens du mouvement.	
	observées.	calculées.
90°	1,000	1,000
87 ,5	0,996	0,972
82 ,5	0,865	0,917
80 ,0	0,856	0,889
77 ,5	0,846	0,861
70 ,0	0,773	0,778
67 ,5	0,737	0,750
65 ,0	0,728	0,722

On remarque que ces résultats sont relatifs au cas de deux plans égaux et articulés, mus dans l'air avec leur arête d'intersection en avant et qu'ils ne sont nullement applicables au cas de plans isolés.

La loi de variation de la résistance, proportionnellement

aux les, est aussi celle que nous avons trouvée pour l'eau, en o ant sur des cônes de diverses acuités (nº 305).

343. *Conclusions générales des expériences de Metz.* — En résumé, les expériences dont on vient de rapporter les résultats et qui ont été faites avec des appareils chronométriques, donnant les durées, à quelques millièmes de seconde près, et les vitesses acquises à un instant quelconque à un centième près, en observant la loi de descente dans l'air de plateaux de différentes grandeurs, de deux plateaux inclinés l'un sur l'autre et celui d'une roue à ailettes, et pour lesquelles les vitesses ne dépassaient pas 9 à 10 mètres en 1 seconde, nous ont conduit aux conclusions suivantes :

1º Dans le mouvement uniforme d'un corps dans l'air, la résistance que le corps éprouve est proportionnelle à l'étendue de sa surface et à un autre facteur composé de deux termes, l'un constant et l'autre proportionnel au carré de la vitesse.

Comme il était d'ailleurs facile de le prévoir, le nombre des molécules d'air choquées par le déplacement du corps, augmentant dans le même rapport que sa densité, l'expression générale de la résistance doit contenir un facteur relatif à cette densité; de sorte qu'en appelant d la densité de l'air à la température et à la pression observées, et d_1 sa densité à 10 degrés et à 76 centigrades de pression barométrique, et en conservant les notations précédentes, cette résistance est représentée par les formules suivantes :

Plans minces perpendiculaires au sens du mouvement	$R = A\frac{d}{d_1}\left\{0^{kil},036+0,084V^2\right\}$
Parachutes...........................	$R = A\frac{d}{d_1}\left\{0,070+0,163V^2\right\}$
Parachutes renversés...............	$R = A\frac{d}{d_1}\left\{0,028+0,0652V^2\right\}$
Deux plans articulés, inclinés l'un sur l'autre.........................	$R = A\frac{d}{d_1}\frac{a}{90}\left\{0,036+0,084V^2\right\}$
Les ailettes d'une roue ou d'un volant	$R = A\frac{d}{d_1}\left\{0,0434+0,1002V^2\right\}$

Nota. On remarquera que cette dernière formule s'accorde d'une manière très-satisfaisante avec les résultats des expériences de M. Thibault.

2° Dans le mouvement accéléré il faut ajouter à l'expression précédente un terme proportionnel à l'accélération du mouvement, et la résistance est alors représentée par les formules suivantes :

Plans minces perpendiculaires au sens du mouvement.......... $R = A\frac{d}{d_1}\left\{0^{kil},036 + 0,084V^2 + 0,164\frac{v}{t}\right\}$

Parachutes.................... $R = A\frac{d}{d_1}\left\{0,070 + 0,0163V^2 + 0,142\frac{v}{t}\right\}$

346. *De l'effort exercé par le vent sur les surfaces immobiles opposées à sa direction.* — L'on ne possède encore que bien peu de résultats d'expérience sur la loi et sur l'intensité des efforts que le vent exerce sur les surfaces exposées à son action. Smeaton, dans ses recherches sur l'eau et le vent, rapporte une table qui lui avait été communiquée par M. Rouse, physicien anglais. Elle est aussi rapportée dans plusieurs ouvrages et notamment dans le Dictionnaire de la science mécanique de Jamieson. Smeaton dit qu'elle a été construite avec beaucoup de soin par M. Rouse, d'après un nombre considérable de faits et d'expériences. Il fait remarquer que pour les vitesses supérieures à 50 milles par heure ou à $22^m,35$ par seconde, ces expériences ne méritent pas le même degré de confiance que pour les vitesses inférieures. Les nombres comparatifs donnés dans cette table pour les efforts paraissent avoir été calculés, en admettant que l'effort exercé est proportionnel au carré de la vitesse du vent et serait en général représenté par la formule

$$F = 0,1163\,AV^2.$$

A étant la surface perpendiculaire à l'action du vent ;
V la vitesse en mètres par seconde ;
F l'effort exercé.

Efforts exercés par le vent sur une surface d'un mètre carré, placée perpendiculairement à sa direction.

DÉSIGNATION VULGAIRE du vent.	VITESSES en mètres par seconde.	EFFORTS EXERCÉS sur une surface d'un mètre carré.
	m.	kil.
Vent à peine sensible	0,50	
Petite brise	1,00	0,140
Bonne brise ou vent frais	2,00	0,540
	3,00	1,047
Vent bon frais	4,00	2,170
	5,00	2,908
	6,00	4,870
Forte brise	8,00	7,443
	10,00	13,540
Vent fort	14,00	22,795
	20,00	46,520
Rafale	22,50	55,000
	27,00	79,000
Tempête	36,00	140,740
Ouragan	40,00	186,080
Ouragan qui déracine les arbres et renverse les maisons	45,00	220,000

347. *Observation sur les vitesses du vent.* — Les vitesses du vent atteignent, dépassent même quelquefois de beaucoup les valeurs que l'on vient d'indiquer, et les ascensions aérostatiques en ont fourni des preuves. On cite entre autres un voyage de Lunardi qui, dans une ascension faite à Édimbourg, où l'air était très-calme à la surface de la terre, fut à une certaine hauteur emporté par un courant d'air avec une vitesse de 70 milles à l'heure ou de $31^m,00$ par seconde; celui de Garnerin, de Londres à Colchester, en 1802, où la vitesse s'éleva à 80 milles par heure ou $36^m,00$ par 1″; enfin celui de Green en 1823, qui parcourut 64 mètres en 1″ sans accident. Ces vitesses suffiront pour montrer la difficulté que présente la direction des ballons. Nous reviendrons d'ailleurs un peu plus tard sur cette question.

348. *Des moyens à employer pour mesurer la vitesse de l'air.* — La difficulté de mesurer avec quelque précision la vitesse de l'air, a été longtemps et est encore le principal obstacle qui s'oppose à ce que des expériences concluantes fassent connaître les lois de l'effort qu'il exerce.

Le moyen le plus généralement employé par les expérimentateurs consiste à abandonner à l'action du vent et à suivre dans leur mouvement de translation, en observant la distance parcourue et le temps correspondant, des corps légers tels que des plumes, des barbes de chardon, des fumées de poudre ou d'essence de térébenthine, etc. Mais ce moyen simple présente peu de précision par suite des faibles distances pendant lesquelles on peut observer.

Les anémomètres, composés d'un petit moulin à ailettes légères, dont le mouvement se transmet à un compteur qui enregistre le nombre de tours, sont d'un usage plus sûr et plus commode, mais il faut au préalable en faire la *tare*, c'est-à-dire déterminer par l'expérience la relation qui existe entre la vitesse du vent et le nombre de tours des ailettes ; cette détermination présente une grande difficulté.

On opère presque toujours cette tare en plaçant l'instrument sur le bras horizontal d'une sorte de manége à axe vertical que l'on fait tourner d'un mouvement aussi uniforme que possible; on observe ainsi simultanément le nombre des tours des ailettes et la vitesse du mouvement de transport de l'instrument, et l'on suppose ensuite que l'effet produit par ce mouvement de l'appareil dans l'air est le même que celui qui serait dû à l'action d'un vent animé de la vitesse de transport de l'anémomètre, sur les ailettes de l'instrument en repos. J'indiquerai tout à l'heure un autre procédé que j'ai mis en usage avec succès pour de grandes vitesses, mais je donnerai d'abord la description d'un anémomètre fort léger que M. Combes, inspecteur général des mines, a fait construire pour mesurer les petites vitesses de l'air, principalement dans l'aérage des exploitations minérales.

349. *Anémomètre de M. Combes.* — Nous emprunterons à ce savant ingénieur la description qu'il a donnée dans les *Annales des mines*, troisième série, de l'instrument qu'il a employé pour les expériences dont il vient d'être question.

« Cet instrument est analogue au moulinet de Woltmann, dont on se sert pour jauger les courants liquides, dont la section est considérable. Il se compose d'un axe très-délié, terminé par deux pivots très-fins, tournant dans des chapes d'agate, et sur lequel sont montées quatre ailettes planes, également inclinées par rapport au plan perpendiculaire à l'axe. Au milieu de l'axe A (fig. 99) est taillée une vis sans fin, laquelle conduit une petite roue R de cent dents; en sorte que celle-ci avance d'une dent pour chaque révolution de l'axe qui porte les ailes. L'axe de cette première roue porte une petite came, qui peut agir sur les dents d'une deuxième roue R'. Celle-ci est maintenue par un valet ou ressort en acier très-flexible qui est attaché à la plaque horizontale sur laquelle est monté l'instrument. A chaque révolution complète de la première roue de cent dents menée par la vis sans fin, la came fait sauter une dent de la seconde roue qui porte cinquante dents : les deux roues sont numérotées de 10 en 10 dents. La première depuis 1 jusqu'à 10, et la seconde de 1 à 5. Des aiguilles indicatrices, fixées aux montants légers qui portent l'arbre des ailes servent à marquer les nombres de dents dont chaque roue a avancé, et partant, à indiquer le nombre de révolutions de l'axe des ailes. Au moyen d'une détente et de deux cordons

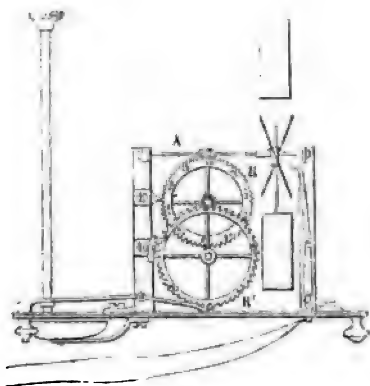


Fig. 99.

qui servent à la mouvoir, on peut, à distance, arrêter le mouvement de rotation des ailes, ou leur permettre de tourner, sous l'impulsion du courant d'air qui les frappe. »

La manière de se servir de l'instrument est facile à concevoir d'après cette description. On ramène les limbes au zéro, on met l'instrument dans l'axe du conduit d'air, en maintenant les limbes immobiles, au moyen d'un arrêt qu'on lâche au moment où l'on veut commencer l'observation, et sur lequel on agit ensuite en sens contraire pour la terminer.

Il convient de prolonger l'observation le plus longtemps possible, et au moins deux à trois minutes, si cela se peut. La division des limbes ne permettant pas de compter plus de 5000 tours, cela ne correspondrait, pour une vitesse de l'air de 3 mètres en 1″, qu'à une durée de 2′,80 environ.

La tare de ces instruments varie assez notablement de l'un à l'autre, quoique leurs dimensions paraissent identiques en tous points. Elle doit donc être faite pour chacun d'eux en particulier et même répétée autant que possible toutes les fois qu'on veut s'en servir après une interruption.

Ainsi l'anémomètre n° 3, dont M. Combes rapporte la tare, a donné

$$v = 0^{m},2578 + 0,0916\,n.$$

v étant la vitesse de l'air en secondes,
et n le nombre de tours des ailettes en 1″.

Un autre anémomètre de même modèle a fourni la relation

$$v = 0,150 + 0,100n.$$

380. *Observation sur l'usage de cet instrument.* — Ce petit instrument est commode pour la mesure des faibles vitesses, puisque l'on voit qu'il est sensible à partir de celles de $0^{m},15$ à $0^{m},25$ par seconde. Dans ce cas il marche assez longtemps pour donner des indications suffisamment exactes pour la pratique, à la condition cependant que le courant sera continu et passablement régulier, ainsi que cela arrive

pour les mines dont l'aérage est produit par des causes permanentes et peu variables d'un instant à l'autre.

Mais lorsque des circonstances accidentelles peuvent, pendant la durée d'une expérience, faire varier beaucoup la vitesse du courant d'air, ainsi que cela arrive dans la ventilation des lieux de réunions nombreuses, dans les hôpitaux, etc., par l'ouverture et la fermeture des portes, qui produisent des intermittences très-grandes, il est nécessaire d'avoir un instrument qui marche beaucoup plus longtemps, afin d'obtenir des résultats moyens plus certains.

D'une autre part, si l'on veut opérer sur le vent proprement dit dont l'intensité varie parfois très-brusquement dans des limites fort étendues, il est en outre nécessaire d'avoir un anémomètre plus solide.

351. *Nouvel anémomètre.* — C'est par ces motifs que j'ai cherché à faire établir un autre anémomètre basé sur le même principe, mais susceptible de résister à des vents d'une grande intensité et de fonctionner assez longtemps pour fournir des résultats moyens assurés. J'ai, de plus, voulu que les indications de l'appareil, dont la disposition générale est représentée figure 100, fussent à l'abri des er-

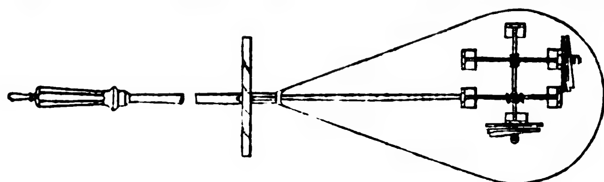


Fig. 100.

reurs que causent l'embrayage et l'arrêt brusque du compteur, et je l'ai fait disposer de façon que l'instrument étant mis en place et son mouvement étant établi régulièrement, l'observateur pût, à l'aide d'un petit système de pointage, marquant des points d'encre grasse sur des cadrans en

émail, déterminer l'instant où il commence à compter le temps et celui où il finit.

La confection de cet anémomètre, confiée à M. Bianchi fils, a reçu en outre de cet habile artiste des perfectionnements qui en rendent la manœuvre simple et facile.

Le volant à ailettes est fixé sur un arbre en acier très-délié porté à ses deux extrémités sur deux supports et vers le milieu sur un troisième support intermédiaire. Les trous sont garnis de pierres dures. Une vis sans fin, à un seul filet, ménagée sur l'axe du volant, conduit une première roue de 100 dents, dont l'axe porte une aiguille double à godet, placée devant un cadran émaillé divisé en 100 parties, et sur lequel on peut compter les tours faits par le volant jusqu'à 100. Sur l'axe de la même roue est une autre vis sans fin qui conduit une seconde roue de 100 dents, dont l'axe porte aussi une aiguille double à godets, qui est placée devant un second cadran divisé en 100 parties, et sur lequel cette seconde aiguille peut marquer les tours de la première roue, ou les centaines de tours du volant à ailettes jusqu'à 10 000. Enfin, sur l'axe de cette seconde roue est fixé un argot qui, à chaque tour de cet axe, fait passer une dent d'une roue à minutes de 50 dents, ce qui permet de compter jusqu'à 500 000 tours.

D'après la tare expérimentale que l'on verra plus loin, on reconnaîtra facilement que ce dispositif permet de compter pendant 10 minutes le nombre de tours correspondant à une vitesse de 40 mètres en 1", et par conséquent pendant un temps beaucoup plus long ceux qui correspondent à des vitesses moindres.

L'appareil du pointage, ingénieusement disposé par M. Bianchi, agit simultanément sur les deux aiguilles doubles, quand on pousse ou que l'on tire un bouton qui est placé à l'extrémité d'une tige de $0^m,60$ de longueur, qui porte l'appareil; ce qui permet à l'observateur de s'isoler complétement du courant d'air : cette transmission de mouvement se fait avec une égale facilité, quelle que soit la

direction que l'on ait donnée à la boîte qui porte le volant à ailettes et son compteur, laquelle peut tourner dans différentes directions, selon celle où l'on veut observer.

Des ailettes de rechange et de diamètres variés peuvent être substituées les unes aux autres selon que l'on veut rendre l'instrument plus ou moins sensible à de faibles vitesses de l'air.

352. *Tare de ces instruments.* — La relation entre les nombres de tours du volant et la vitesse de l'air a d'abord été déterminée par la méthode ordinaire, mais en plaçant l'anémomètre à l'extrémité du bras horizontal, de 4 mètres de longueur, d'un petit manége établi dans la grande église de l'abbaye Saint-Martin; un renvoi de mouvement fort simple permettait à un observateur placé près de l'arbre vertical de ce manége de faire jouer l'appareil de pointage, quand le mouvement de rotation était devenu régulier.

L'on a ainsi observé avec deux volants à ailettes différents, les nombres de tours et les vitesses de transport de plusieurs anémomètres; on les a représentés graphiquement en prenant les nombres de tours pour ordonnées, et les vitesses de transport pour abcisses, et l'on a reconnu que tous les points ainsi déterminés se trouvaient très-sensiblement sur une même ligne droite, qui venait couper la ligne des abcisses en avant de l'origine, ce qui montrait que la relation entre les vitesses et les nombres de tours était de la forme

$$v = a + bn,$$

a représentant la vitesse de transport de l'instrument ou la vitesse de l'air, au delà de laquelle seulement les résistances passives de l'instrument commencent à être vaincues.

Ces premières expériences ont donné pour les deux volants de l'anémomètre les résultats suivants.

Les expériences au nombre de 50, faites sur le 1[er], qui avait les plus petites ailettes, à des vitesses de transport

comprises entre $1^m,60$ et $9^m,50$, ont donné des résultats représentés par la formule

$$v = 0^m,60 + 0,055\,n.$$

Une autre série de 40 expériences faites sur le même anémomètre, avec des ailettes plus grandes, et par conséquent plus sensibles, a fourni des résultats représentés par la formule

$$v = 0^m,45 + 0,05875\,n.$$

353. *Observation sur le mode de tare de l'instrument.* — Ce qui précède suppose, comme on l'a déjà fait remarquer, que l'action de l'air en repos sur un corps en mouvement, est la même à vitesses égales que celle de l'air en mouvement sur un corps en repos. Sans prétendre actuellement, contester ni admettre la différence que Dubuat a cru pouvoir déduire de ses expériences entre ces deux modes d'action, je me bornerai à dire que, dans le cas actuel, cette différence, si elle existe, devait être assez faible pour qu'il fût permis de la négliger. Il n'y avait pas, que je sache, de moyen connu de procéder autrement, et les expériences suivantes confirmeront, je pense, l'exactitude des formules précédentes*.

354. *Extension de la tare à de grandes vitesses.* — La vitesse de transport imprimée à l'anémomètre, ne pouvant dépasser celle de $10^m,00$ environ en $1''$, j'ai employé, pour étendre la tare de l'instrument à de grandes vitesses, le moyen suivant : un petit ventilateur de $0^m,30$ de diamètre à ailes planes, dirigées dans le sens du rayon, a été muni

---

* Il n'est pas inutile de dire que les moulinets à ailettes du même genre employés au jaugeage des eaux, ont donné des résultats analogues aux précédents et qu'en particulier les expériences de feu M. Lapointe sur son tube jaugeur ont montré que la relation $V = a + bN$ subsistait même quand les vitesses étaient variables.

d'un tuyau cylindrique par lequel il chassait l'air, et dont la section transversale, ainsi que celle du conduit de raccordement avec l'enveloppe, était égale à la surface des palettes. Cette disposition avait pour but de ne pas produire d'altération sensible dans la vitesse de l'air pendant son trajet.

Le ventilateur était mû par une petite machine à vapeur, et au moyen de poulies de différents diamètres, on a pu faire varier sa vitesse depuis 127 jusqu'à 2220 tours en 1'.

En commençant d'abord à le faire marcher à des vitesses assez faibles, on a pu se servir, pour mesurer la vitesse de l'air dans le tuyau, de la tare faite avec l'appareil de rotation à axe vertical, et déduire du nombre de tours de l'anémomètre, la vitesse de l'air dans le tuyau, jusqu'à la limite de 10 à 12 mètres en 1".

En comparant ensuite ces vitesses moyennes de sortie de l'air avec celles des palettes du ventilateur, on a reconnu qu'elles étaient dans un rapport constant, de sorte que la vitesse du ventilateur étant v', et celle de l'air v, on avait le rapport

$$\frac{v}{v'}=K \quad \text{ou} \quad v=Kv'$$

et par suite

$$Kv'=a+b.n \quad \text{ou} \quad v'=\frac{a}{K}+\frac{b}{K}n,$$

ce qui montrait qu'entre ces limites, la vitesse des ailettes du ventilateur était proportionnelle à celle des ailettes de l'anémomètre.

Ceci étant reconnu, l'on a fait marcher le ventilateur de plus en plus rapidement, et l'on a noté les nombres de tours n, faits par l'anémomètre en 1", puis admettant que le rapport K entre les vitesses de l'air et celle du centre des ailes du ventilateur, restât le même aux grandes vitesses qu'aux petites, on en a déduit les vitesses moyennes de l'air, qui venait choquer les ailettes.

En reportant ensuite ces nombres de tours comme or-

données, et les vitesses, comme abcisses, sur la même figure qui avait été construite pour les expériences précédentes, on a encore trouvé que les points ainsi déterminés étaient sur le prolongement de la même ligne droite qui avait donné la relation

$$v = a + b.n.$$

Cette coïncidence des résultats des deux séries d'expériences montre la permanence simultanée des deux relations

$$v = a + b.n \quad \text{et} \quad v = \text{K}v',$$

jusqu'aux plus grandes vitesses.

En effet, puisqu'en prenant pour v les valeurs de Kv', on a reconnu aux grandes vitesses l'exactitude de la relation

$$\text{K}v' = a + b.n,$$

ainsi que le montre le tracé, il s'ensuit que les rapports $\frac{a}{\text{K}}$ et $\frac{b}{\text{K}}$ sont constants, ce qui ne peut arriver qu'autant que a, b et K sont aussi constants.

En faisant $\frac{a}{\text{K}} = c$ et $\frac{b}{\text{K}} = c'$, c et c' étant deux nombres constants, on en déduit

$$\text{K} = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad \frac{b}{\text{K}} = \frac{bc}{a} = c', \text{ d'où } \frac{b}{a} = \frac{c}{c'};$$

ce qui implique nécessairement la constance du nombre b, puisque le coefficient a est indépendant de la vitesse ou du nombre de tours.

Il résulte de ces expériences :

1° Que les observations faites avec le ventilateur ont étendu la tare de l'anémomètre à petites ailettes, jusqu'à des vitesses de 40^{m} environ, ce qui dépasse les besoins habituels des expériences ;

2° Qu'il existe un rapport constant entre la vitesse de rotation des ventilateurs et celle de l'air qu'ils chassent ou qu'ils aspirent dans un tuyau. Ce rapport dépend d'ailleurs, non-seulement des dimensions des tuyaux, mais encore de

celles des ouvertures centrales d'admission dans le ventilateur;

3° Qu'à l'avenir, et quand ce rapport de la vitesse de l'air expulsé par un ventilateur donné au nombre de tours de ses ailes, sera connu, l'on pourra très-facilement tarer les anémomètres de différents genres, soit ceux qui donnent la vitesse d'après le nombre de tours de leurs ailettes, soit les anémomètres à pression; ce qui sera beaucoup plus commode que le premier moyen que nous avons employé, et permettra d'étendre la tare à de grandes vitesses.

353. *Expériences de M. Thibault sur l'effort exercé par le vent sur les surfaces immobiles exposées à son action, perpendiculairement à sa direction.* — L'on doit aussi à M. Thibault quelques expériences qu'il avait entreprises comme introduction à des recherches sur l'action que le vent exerce sur la voilure, et dans lesquelles il avait employé des moyens ingénieux pour mesurer l'effort exercé par le vent sur des surfaces d'une étendue donnée; il s'est servi d'un anémomètre muni d'un dynamomètre, et il déterminait la vitesse du vent en abandonnant à l'air des plumes légères ou des aigrettes de chardon crépu, et en observant le temps qu'elles employaient à parcourir un espace déterminé. Ce moyen est peu exact et peut occasionner quelques erreurs de nature à influer sur les résultats finaux de l'expérience.

En admettant, conformément aux expériences de Metz, dont il a été rendu compte aux nos 336 à 339, que la résistance soit exprimée par la formule

$$R = K'_1 A + K_1 A V^2,$$

dans laquelle $K'_1 = 0^{kil},036$ sera le coefficient du terme constant, on trouve que les expériences de M. Thibault conduisent aux résultats suivants, qui donnent pour la moyenne générale des valeurs du coefficient K_1

$$K_1 = 0,11878,$$

Expériences de M. Thibault sur l'action du vent contre des surfaces planes perpendiculaires à sa direction.

SURFACE, A.	HAUTEUR du baromètre.	TEMPÉRATURE.	VITESSE DU VENT.	RÉSISTANCE TOTALE.	RÉSISTANCE CONSTANTE, K'_1A.	RÉSISTANCE proportionnelle à V^2.	RÉSISTANCE pour $1^m,00$ de vitesse. K_1A.	RÉSISTANCE pour $1^{mq},00$ de surface et $1^m,00$ de vitesse. K_1.
	m.		m.	kil.	kil.	kil.		
0,1080	0,766	19°	4,177	0,2225	0,00390	0,2186	0,01240	0.11494
	0,751	18	4,854	0,2496		0,2457	0,01043	0,09656
	0,746	15	4,955	0.2577		0.2537	0,01033	0,09568
	0,741	15	5,600	0,4489		0,4450	0,01419	0,13149
	0,752	14 ,5	8,219	0,9208		0,9159	0,01357	0,12568
						Moyenne.....		0,11287
0,2034	0,747	14 ,5	4,253	0,4481	0,00792	0,4402	0,02434	0,11965
	0,736	9 ,4	1,829	0,0930		0,0951	0,02842	0,13973
						Moyenne....		0,12469

Il résulte de cette valeur moyenne que l'action du vent sur des surfaces planes, perpendiculaires à sa direction, serait exprimée par la formule

$$R = A\{0,036 + 0,11878V^2\},$$

si l'on ne tient pas compte de la variation de densité correspondant à la pression barométrique et à la température, ce qui, pour les applications usuelles, est assez peu important, et serait d'ailleurs facile à faire.

356. *Accord de ces résultats avec ceux du professeur Rouse, cités par Smeaton.* — On remarquera qu'à l'exception du terme constant 0,036A, qui, pour les vitesses moyennes du vent, a une assez faible influence, la formule précédente donne à la résistance, à peu près la même valeur que celle du n° 346, qui représente les expériences du physicien

anglais Rouse, lequel paraît avoir opéré à des vitesses bien supérieures à celles qu'a observées M. Thibault.

Il résulte de cet accord que l'une et l'autre formules peuvent être employées avec confiance pour les grandes vitesses.

357. *Observation.* — Les expériences de Metz ayant donné pour le coefficient K_1 la valeur $K_1=0,084$, dans le cas où le corps se meut dans l'air au repos, il s'ensuivrait, conformément aux idées de Dubuat, que l'effort exercé par l'air en mouvement sur un corps au repos, serait à la résistance éprouvée par le même corps en mouvement dans l'air, à vitesses égales, à peu près dans le rapport de

0,1188 à 0,084 ou de 1,41 à 1.

358. *Influence de la courbure des surfaces.* — M. Thibault a fait la comparaison des efforts exercés par le vent sur une surface plane et sur une surface de toile à double courbure de $0^{m},1089$ de surface totale et pouvant, dans ce dernier cas, prendre une courbure dont les derniers éléments faisaient avec la direction du vent un angle de 50 à 55 degrés. Il a trouvé que, le même jour et sous l'action du même vent, l'effort exercé sur la surface plane était à l'effort exercé sur la surface courbe dans le rapport de 0,1079 à 0,1135 ou de 0,951 à 1, ce qui montre qu'ils diffèrent assez peu.

359. *Influence de l'inclinaison des surfaces par rapport au vent.* — En présentant successivement à l'action du vent des surfaces perpendiculaires ou obliques à sa direction, l'auteur a constaté que l'effort exercé sur une surface donnée n'était influencé par leur inclinaison que quand celle-ci atteignait les angles de 45 à 50° sur la direction du vent. On se rappelle qu'un résultat analogue a été obtenu dans le cas des surfaces en mouvement dans l'air au repos.

Les autres expériences de M. Thibault étaient relatives à la comparaison des vitesses du vent et d'un vaisseau sous

voiles, et n'étaient que le prélude de celles qu'il se proposait d'entreprendre sur ce sujet important, lorsqu'un accident funeste vint enlever à la marine ce jeune et savant officier.

360. *Difficultés que présente la direction des ballons.*—Les fréquentes ascensions aérostatiques qui se font depuis quelques années ont provoqué un grand nombre de tentatives pour parvenir à diriger dans l'air calme, et même contre le vent, les ballons de diverses formes, et il ne sera peut-être pas inutile de dire quelques mots qui fassent sentir les difficultés de ce problème et même l'impossibilité d'une solution avec les moyens mécaniques dont nous disposons actuellement.

Nous ferons d'abord remarquer que l'observation prouve que le calme de l'air à la surface de la terre n'est nullement une garantie que le même repos existe dans des couches supérieures à de faibles hauteurs, et que par conséquent un appareil suffisant pour le calme pourrait fort bien ne pas l'être à toutes hauteurs.

Le général Meusnier, de l'arme du génie, qui s'est beaucoup occupé de la question des ballons, a laissé sur les aérostats un mémoire, dont on trouve une analyse succincte dans le n° 1 (2e année) du journal *le Conservatoire*. On voit dans ce mémoire que ce savant officier avait déjà signalé la difficulté du problème en ces termes :

« On a examiné quel pouvait être l'effet de beaucoup de machines proposées pour la direction des aérostats : ces machines devront être mues par des hommes dont le poids est considérable relativement à leur force; il s'ensuit qu'elles auront peu d'effet pour vaincre les résistances que l'air présente aux ballons, en raison de leur grande surface. Le calcul appliqué à des moyens de direction, de quelque espèce qu'ils puissent être, annonce en général *qu'ils ne peuvent guère procurer aux ballons qu'une vitesse de plus d'une lieue à l'heure* ($1^m,11$ *en* $1''$), *indépendamment des vents.* »

M. le colonel Didion, dans une note lue au congrès scientifique de Metz en 1838, a montré par des calculs fort simples que, dans les hypothèses les plus favorables sur les poids des hommes transportés, des ballons et des agrès, la vitesse imprimée dans l'air calme à un ballon ne dépasserait effectivement pas cette limite. Nous indiquerons succinctement la marche qu'il a suivie.

Un mètre cube d'air à la température de zéro et à la pression de $0^{m},76$ de mercure pèse $1^{kil},300$, tandis que le même volume de gaz hydrogène impur et humide, tel qu'on le fabrique pour l'usage en grand, pèse $0^{kil},100$. La différence $1^{kil},200$ est le poids que pourrait soutenir dans l'air un mètre cube de ce gaz. Mais comme l'air et le gaz sont soumis dans les régions élevées à une pression moindre, ils sont alors dilatés, le volume que le même poids de gaz occuperait sera plus considérable, et il devra en être de même de celui du ballon.

Si l'on admet que, pour passer au-dessus des montagnes ordinaires, on doive s'élever à 800 mètres au-dessus de la mer, et qu'alors la pression ne soit plus que 0,9 de celle qui a lieu à la surface de la terre, et si de plus la température est de 10°, il en résultera que le poids de $0^{kil},100$ d'hydrogène, au lieu d'occuper 1 mètre cube, aura un volume de $1^{m.c.},15$, et 1 mètre cube de ce gaz ne pèsera plus que $0^{kil},087$. D'une autre part, le mètre cube d'air, dont la pression n'est plus que 0,9 et la température $t = 10^{o}$, pèsera

$$P = \frac{1^{k},300 \times 0,9}{1 + 0,0366} = 1^{kil},127.$$

Par conséquent 1 mètre cube du gaz du ballon ne pourra plus faire équilibre qu'à un poids de

$$1^{kil},127 - 0^{kil},087 = 1^{kil},04.$$

Si l'on admet que le poids d'un homme ne soit que de 65 kilogrammes, et celui de sa nacelle de 5 kilogrammes, sans aucun approvisionnement, le poids total à enlever pour

un homme seul serait de 70 kilogrammes, et il faudrait que le ballon eût un volume de $\frac{70}{1,04}=66^{m.c.},2$ par homme à enlever, ce qui correspond à une sphère de $5^m,04$ pour un seul homme. En tenant compte du poids de l'enveloppe qui ne peut guère peser moins de $0^{kil},250$ le mètre carré, on trouverait même que le diamètre doit être de $5^m,59$.

En calculant d'après cette base les diamètres minima qu'il faudrait donner à des ballons destinés à porter différents nombres d'hommes, M. Didion trouve ainsi :

Nombres d'hommes...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poids à enlever	70^{kil}	140	210	280	350	420	490	560	630	700
Diamètres des ballons	$5^m,59$	6,88	7,74	8,50	9,14	9,71	10,15	10,60	11,01	11,30

D'après les expériences connues, la résistance de l'air au mouvement des corps sphériques, pour des vitesses comprises en 1 et 10 mètres, est approximativement représentée par la formule

$$R=0,0375\frac{D^2}{1,273}\times V^2.$$

S'il s'agit par, exemple, d'un ballon destiné à un seul homme, on a

$$D=5^m,59 \quad \text{et} \quad \frac{D^2}{1,273}=\frac{\overline{5,59}^2}{1,273}=24^{m.q.},25,$$

$$R=0,909V^2,$$

ce qui donne les résistances et les quantités de travail suivantes pour différentes vitesses :

Vitesses en mètres par seconde	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
Résistances en kilogrammes...	0,709	3,636	8,181	14,544	22,725
Travail consommé en 1 seconde	$0^{km},909$	$7^{km},272$	$24^{km},543$	$58^{km},176$	$113^{km},625$

Or un homme, dans un travail journalier de 8 heures, ne peut, dans les circonstances les plus favorables et avec les mécanismes les mieux appropriés à sa constitution, développer un travail de plus de 6 à 8 kilogrammètres en 1".

L'on voit donc qu'en admettant même qu'il n'y eût, par les résistances passives des appareils de transmission du mouvement au ballon, aucune perte de travail, ce qui ne saurait être, c'est tout au plus si un homme pourrait imprimer à son ballon, dans un air au repos, une vitesse de 2 mètres par seconde ou de $7^{km},2$ à l'heure.

Quant aux autres moteurs, tels que la machine à vapeur, leur poids propre, celui du combustible, de l'eau qu'il faudrait emporter, conduiraient aussi à donner au ballon des dimensions telles que le travail de la résistance de l'air à de faibles vitesses serait de beaucoup supérieur à celui que l'appareil moteur pourrait développer.

En résumé, dans l'état actuel de nos connaissances et des progrès des arts mécaniques, la solution de la question de la navigation aérienne est renfermée dans une sorte de cercle vicieux dont elle ne pourra sortir que par la découverte d'un nouveau moteur à la fois léger et puissant, par rapport à la quantité de travail qu'il développerait.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Notions préliminaires.

	Pages.
De l'étendue	1
Démonstration de la formule de Simpson	2
Divisibilité des quantités en éléments infiniment petits	6

Des forces et de la mesure de leur travail.

Inertie de la matière	8
Définition des forces	Ib.
Mode d'action des forces	10
Mesure des forces	11
Dénominations diverses des forces	12
Constitution des corps	Ib.
Principe de l'action égale et contraire à la réaction	13
Point d'application des forces	Ib.
Effet et travail des forces	15
Mesure du travail d'une force constante, quand le chemin parcouru par son point d'application est dans sa direction propre	Ib.
Représentation de ce travail par la surface d'un rectangle	16
Mesure du travail d'une force variable	Ib.
Effort moyen d'une force variable	19
Observations sur le mode de calcul suivi par les praticiens anglais	20
Cas où l'on peut prendre la moyenne arithmétique d'un certain nombre de valeurs variables pour celle de l'effort moyen	21
Applications	Ib.
La notion du travail est indépendante du temps	22
Dénominations diverses du travail mécanique	23
Unité de travail mécanique	Ib.
Observations sur les conditions du travail mécanique	24
Transport horizontal des fardeaux	25
Cas où la force n'agit pas dans la direction même du chemin parcouru	26
Travail de la pesanteur sur un corps qui parcourt une courbe quelconque	27
Manivelle et sa bielle	28
Observation relative au sens de l'effort par rapport à celui du chemin parcouru	Ib.
Ressorts	29
Dilatation et contraction	Ib.

Des dynamomètres ou description et construction des instruments propres à mesurer le travail développé ou consommé dans les actions mécaniques.

Pages.
Conditions générales et particulières auxquelles ces instruments doivent satisfaire 34
Règles pour proportionner les lames de ressort 35
Rapport qu'il convient d'établir entre les diverses proportions 37
Profil longitudinal des lames .... Ib.
Disposition des lames de ressorts .... Ib.
Disposition pour obtenir une trace permanente des flexions du ressort 38
Manière de faire mouvoir le papier qui reçoit la trace du style 39
Observation sur la quadrature des courbes tracées 40
Moyens d'opérer cette quadrature .... Ib.
Usage du planimètre 41
Dynamomètre pour totaliser la quantité d'action développée pendant un intervalle de temps ou de chemin considérable 44
Disposition pour obtenir des indications du nombre de tours faits par la roulette 47
Dynamomètre à moteur chronométrique .... Ib.
Dynamomètre de rotation 48
Description du dynamomètre de rotation à styles .... Ib.
Transmission du mouvement de l'arbre à la bande de papier 50
Résultats d'expériences faites avec le dynamomètre de rotation ... Ib.
Dynamomètre de rotation à compteur 52
Indicateurs de la pression de la vapeur dans les cylindres des machines .... Ib.
Nouvel indicateur à style 54

De la transmission du mouvement par les forces.

Observation générale relative aux lois du mouvement 56
Conséquence relative aux causes qui produisent l'accélération ou le retard 57
Mouvement vertical des graves ou corps pesants .... Ib.
Chute successive des corps pesants 59
Principe de la proportionnalité des forces aux vitesses .... Ib.
Mesure des forces motrices et d'inertie 60
Cas où la force est constante 62
Relation des forces aux accélérations .... Ib.
De la quantité du mouvement 63
Forces égales agissant pendant des temps égaux 64
Vérification des considérations précédentes par des expériences directes 67
Choc de deux corps élastiques 71
Quantité de mouvement communiquée par une force constante 73

Observation des lois du mouvement.

Détermination de l'intensité des forces par l'observation de la loi des mouvements qu'elles produisent 78

Pages.
Moyens employés pour déterminer les lois du mouvement des corps. 78
Appareil du colonel Beaufoy.... 79
Appareil d'Eytelwein.... *Ib.*
Nouveaux appareils.... *Ib.*
Plateaux en zinc.... 85
Appareil à relever les courbes.... *Ib.*
Description de l'appareil chronométrique à cylindre et à style pour observer les lois du mouvement.... 86
Discussion du résultat fourni par l'appareil.... 88
Détermination de la vitesse.... 89
Démonstration expérimentale du principe de la proportionnalité des forces aux vitesses.... 91

Principe des forces vives.

Mesure du travail mécanique développé par les forces motrices ou d'inertie dans le mouvement varié.... 94
Force vive.... 95
Effets des gaz de la poudre dans les armes et dans les bouches à feu. 96
Relation entre les charges et les vitesses.... 99
Comparaison des forces vives communiquées par diverses poudres.. 102
Utilité de la considération des efforts moyens.... 103
Comparaison des effets de la poudre et de ceux du pyroxile dans les armes.... *Ib.*
Consommation et restitution de travail par l'inertie.... 109
Moutons à enfoncer les pilots, à découper, etc.... *Ib.*
Dans les chocs il y a toujours perte de travail.... 110
Travail dépensé pendant la période de compression du choc de deux corps non élastiques.... *Ib.*
Du travail dû à la compression et au retour à la forme primitive dans le cas des corps élastiques.... 112
Du travail perdu dans le choc des corps imparfaitement élastiques.. 113
Les masses en mouvement peuvent être regardées comme des réservoirs de travail.... *Ib.*
Cas du mouvement périodique.... 114

Composition des mouvements, des vitesses et des forces.

Composition et décomposition des mouvements simultanés.... 115
Cas où les mouvements simultanés sont dirigés dans le même sens. 116
Composition de plusieurs vitesses simultanées dirigées selon la même ligne.... 117
Composition de deux mouvements dirigés d'une manière quelconque. 118
Mouvement varié.... 120
Cas où les directions des composantes sont à angle droit.... 121
Composition d'un nombre quelconque de mouvements ou de vitesses simultanés dans un même plan.... *Ib.*
Résultante de trois mouvements ou de trois vitesses simultanés dans l'espace.... 123
Un mouvement ou une vitesse quelconque peut être décomposé

Pages.
en trois mouvements ou en trois vitesses suivant trois directions données. 124
Résultante d'un nombre quelconque de mouvements ou de vitesses simultanés. Ib.
Cas où la résultante est nulle. 126
Théorème des moments de Varignon. Ib.
Extension de ces théorèmes aux corps ou systèmes matériels animés d'un mouvement commun de translation. 128
Indépendance de l'action simultanée de plusieurs forces sur un même point. Ib.
Cas où les forces agissent dans la même direction. 129
Cas où les forces qui sollicitent le corps n'ont pas la même direction. 130
Quantité de travail d'une force dont le point d'application ne se meut point dans sa direction propre. 131
Application du théorème de Varignon aux forces. 132
Le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces est égal à la somme ou à la différence des quantités de travail qu'elles développent. 133
Forces agissant dans des directions quelconques. Ib.
Cas où le point matériel tend à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe. 135
Condition du mouvement uniforme ou de l'équilibre. Cas où toutes les forces sont contenues dans le même plan. Ib.
Cas où les forces agissent d'une manière quelconque dans l'espace. 137
Forces parallèles. 138
Conséquences relatives à la composition des forces parallèles. 139
Point d'application de la résultante des forces parallèles. Ib.
Toute force donnée peut être décomposée en deux autres forces parallèles, agissant en des points donnés. 141
Extension des théorèmes précédents à un nombre quelconque de forces parallèles comprises ou non comprises dans un même plan. 143
Travail de la résultante de plusieurs forces parallèles. 144
Centre des forces parallèles. Ib.
Emploi des moments pour déterminer la position de la résultante. 145
Cas où toutes les forces parallèles sont égales et dirigées dans le même sens. Ib.
Condition du mouvement uniforme ou de l'équilibre. Ib.
De la balance. 146
Vérification des balances. 150
Méthode des doubles pesées. 151
Balance romaine. Ib.
Peson. 154
Balance-bascule de Quintenz. 155
Théorie du levier. 158

Du centre de gravité et de l'équilibre des tensions dans les systèmes articulés.

Application des théorèmes précédents à la pesanteur. 161
Détermination du centre de gravité. Ib.

Pages.
Méthode géométrique 162
Triangle .... Ib.
Quadrilatère quelconque 163
Polygone .... Ib.
Pyramide triangulaire .... Ib.
Centre de gravité d'un corps terminé par des formes quelconques .. 164
De la stabilité de l'équilibre 165
Application des considérations générales sur la composition et la décomposition des forces 166
De l'équilibre des cordes 167
Équilibre entre les efforts transmis par des cordes ou des tiges qui concourent en un même point 168
Poulie mobile .... Ib.
Cas d'un pilier .... Ib.
Du polygone funiculaire 169
Cas où les forces qui sollicitent le polygone funiculaire sont des poids 170
Détermination des tensions par construction graphique 171
Des ponts suspendus 172
Application 176

Composition générale et équilibre des forces appliquées à un corps solide.

Des forces appliquées aux corps solides 178
Mouvement de transport d'un corps ou d'un système de corps parallèlement à lui-même .... Ib.
Cas du mouvement varié 179
Quantité de mouvement et force vive d'un corps 180
Travail de la pesanteur dans les systèmes articulés ou composés. 181
Un système de forces quelconques, agissant sur un corps solide, peut toujours se réduire à deux forces équivalentes, appliquées à deux de ses points et dont l'un serait choisi à volonté 182
Condition de l'uniformité du mouvement ou de l'équilibre 183

Du mouvement de rotation.

Travail et équilibre des forces dans le mouvement de rotation autour d'un axe fixe 185
Conditions générales de l'uniformité du mouvement ou de l'équilibre d'un corps solide, libre dans l'espace, soumis à des forces quelconques 187
De la force centrifuge 188
Mesure de la force centrifuge 189
Travail développé par la force centrifuge 191
Action de la force centrifuge sur les voitures 193
Action de la force centrifuge dans les volants 194
Application au mouvement de l'eau contenue dans un vase qui tourne autour d'un axe vertical 195
Surface de niveau de l'eau contenue dans un auget de roue hydraulique à axe horizontal 196

Pages.
Du régulateur à force centrifuge.................................... 197
Disposition à donner au régulateur à force centrifuge.............. 202
Résultats d'observations faites sur l'effet de ce régulateur.......... 205
Comparaison des données de l'expérience avec les formules........ 206
Modification du poids des boules pour obtenir une plus grande régularité.. 207
Observation relative à la transmission du mouvement de la vis sans fin à la vanne.. 208
Disposition indispensable dans l'emploi de ces régulateurs.......... 209
Modification de l'appareil précédemment décrit.................. Ib.
Autres régulateurs.. 210
Du mouvement varié autour d'un axe.......................... Ib.
Observation importante sur les moments d'inertie.................. 212
Principe des forces vives dans le mouvement de rotation autour d'un axe.. 214
Théorie du pendule.. 216
Durée des oscillations d'un pendule dont l'écart est très-petit...... 219
Du pendule composé.. 221
Longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé.......................... 222
Détermination du moment d'inertie d'un pendule composé......... 223
Détermination du centre de gravité des pendules composés......... 225
Centre de percussion.. 226
Théorie du pendule balistique.................................. 228

Application générale du principe des forces vives aux machines.

Application du principe des forces vives aux machines............. 234
Conditions du maximum d'effet des machines.................... 235
Travail des puissances.. 236
Travail des résistances utiles.................................. Ib.
Travail des resistances nuisibles ou passives.................... 237
Pièces à mouvement alternatif.................................. Ib.
Influence de la force vive possédée ou acquise à chaque période. 238
Cas du mouvement périodique.................................. 239
Avantages et conditions du mouvement uniforme.................. Ib.
Inconvenients du mouvement varié et moyens de les diminuer.. 240
Observations sur la mise en marche des machines et les variations de la vitesse qui ont alors lieu.......................... Ib.
Observation relative au mouvement perpétuel.................... 242
Mouvement periodique.. Ib.
Manière de limiter les écarts de la vitesse. Théorie des volants..... 243
Machines à vapeur à pleine pression............................ 246
Volants pour les machines à détente............................ 247
Volant pour marteaux de forge.................................. 248
Marteaux frontaux.. Ib.
Marteaux à l'allemande, à engrenages............................ 249
Martinets à engrenages.. Ib.
Scieries verticales.. Ib.

Pages

Nécessité de l'emploi des volants dans les machines où il y a des chocs 250
Proportions des volants pour les moulins à poudre de vingt pilons.. *Ib.*
Laminoir à grandes tôles et à gros fers.......... 251
Observations sur l'emploi des volants.......... 252

Du frottement.

Rappel des anciennes expériences.......... 253
Expériences de Metz.......... 255
Description sommaire des appareils employés.......... *Ib.*
Examen des résultats graphiques des expériences.......... 256
Formules employées au calcul des résultats des expériences.......... 257
Relation entre la tension de la corde et le frottement du traîneau.. 260
Résultats d'expériences.......... 261
Expériences sur le frottement au départ ou quand les surfaces ont été quelque temps en contact.......... 268
Observation relative à l'expulsion des enduits sous de fortes pressions et par un contact prolongé.......... 273
Influence des vibrations sur le frottement au départ.......... *Ib.*
Influence des enduits.......... 274
Adhérence des mortiers et enduits solidifiés.......... 275
Observation sur l'introduction du frottement et de la cohésion dans les calculs sur la stabilité des constructions.......... *Ib.*
Expériences sur le frottement pendant le choc.......... *Ib.*
Description de l'appareil employé aux expériences.......... 276
Circonstances générales des expériences.......... 277
Examen général de ce qui se passe dans les expériences.......... 278
Formules employées au calcul des expériences.......... *Ib.*
L'accélération du mouvement du traîneau pendant la chute de la bombe peut être négligée.......... 280
Cas où le mouvement du traîneau est accéléré.......... 281
Résultats des expériences.......... 282
De la transmission du mouvement à l'aide de courroies.......... 285
Glissement des cordes ou courroies sur des cylindres.......... *Ib.*
Expériences sur le glissement des cordes et des courroies à la surface des tambours en bois et des poulies en fonte.......... 288
Résultats d'expérience et conclusions.......... *Ib.*
Expériences sur la variation des tensions des cordes et des courroies sans fin employées à transmettre le mouvement.......... 292
Observations sur les résultats de ces expériences.......... 299
Frottement des tourillons.......... 300
Avantage des métaux grenus.......... 303
Observation relative aux mécanismes très-légers.......... 304
Usage des résultats de l'expérience.......... *Ib.*
Application aux vannes.......... 310
Application aux châssis de scie.......... 312
Application aux tourillons.......... *Ib.*
Essieux des voitures.......... 315

De la roideur des cordes.

Pages.
De la roideur des cordes.. 316
Expériences de Coulomb avec l'appareil d'Amontons............... Ib.
Résultats des expériences de Coulomb........................... 318
Expression générale de la résistance à l'enroulement............. 320
Autres expériences de Coulomb.................................. 322
Extension des résultats des expériences de Coulomb à des diamètres différents.. 324
Expression de la roideur des cordes en fonction du nombre des fils de caret.. 325
Observation relative aux cordes usées........................... 327
Cordes goudronnées... 328
Table des roideurs des cordes de différents diamètres enroulées sur un tambour d'un mètre de diamètre......................... 329
Cordes mouillées... 331
Usage des tables ou formules précédentes........................ Ib.

Du tirage des voitures et des effets destructeurs qu'elles produisent sur les routes.

Du tirage des voitures.. 333
Expériences sur les voitures marchant sur des routes ordinaires.... 336
Rapport du tirage à la charge.................................... 338
Influence de la pression... 340
Influence du diamètre des roues.................................. 341
Influence de la largeur des jantes............................... 343
Influence de la vitesse.. 345
Expression approximative de l'accroissement de la résistance avec la vitesse.. 346
Conséquences pratiques de ces expériences........................ 348
Comparaison des routes pavées et des routes en empierrement...... Ib.
Influence de l'inclinaison des traits............................ 350
Résumé et application des résultats généraux des expériences..... 352
Conclusions générales.. 353
Conséquences relatives à la construction des voitures............ 354
Des effets destructeurs produits par les voitures sur les routes...... 355
Influence préservatrice des grands diamètres de roues............ Ib.
Expériences directes sur les effets destructeurs produits par les voitures sur les routes....................................... 356
Expériences sur l'influence de la largeur des jantes............. 357
Conséquences de ces expériences.................................. 358
Expériences exécutées avec les mêmes voitures sous des charges égales.. 359
Expériences sur l'influence du diamètre des roues, sur les dégradations qu'elles produisent sur les routes........................ Ib.
Influence de la vitesse sur les effets destructeurs.............. 360
Expériences comparatives sur les dégradations produites par les voitures comtoises, les charrettes et les chariots de roulage..... Ib.

Pages.
Expériences ayant pour but de déterminer les chargements d'égale dégradation 362

Résistance des fluides.

De la résistance des fluides 363
Considérations théoriques .... Ib.
Travail développé par seconde par la résistance du milieu 365
Expressions équivalentes de la résistance 366
Cas où le corps est en repos dans un fluide en mouvement .... Ib.
Expériences sur la résistance de l'eau au mouvement des corps de diverses formes 367
Mode d'observation 368
Observations sur ces résultats 369
Influence de l'acuité des angles des cônes sur la résistance 370
Expériences sur la résistance de l'eau au mouvement des projectiles. 371
De la résistance de l'eau au mouvement des corps flottants 372
Influence de la forme des corps flottants .... Ib.
Des bateaux à fond plat relevé à l'avant-bec 373
Vitesse des ondes 376
Résultats des expériences sur la résistance des bateaux au halage... 379
Bateaux rapides .... Ib.
Conséquences de ces expériences 382
Variations accidentelles de la résistance .... Ib.
Résumé 384
Du travail développé par les chevaux dans le halage des bateaux rapides .... Ib.
Observation sur le travail journalier des chevaux 387
De la résistance de l'eau au mouvement des roues à palettes planes. Ib.
Causes qui altèrent la loi de la résistance 390
Écartement convenable des palettes 392
Valeur du coefficient K_1 du second terme de la résistance .... Ib.
Cas où la roue marche dans une eau courante 393
Influence de la présence d'un bateau près des roues 394
Application aux roues des bateaux à vapeur 395
De la résistance de l'air 397
Résultats des expériences de Borda sur la résistance de l'air aux corps en mouvement 398
Expériences de M. Thibault 399
Observation relative aux régulateurs à ailettes et aux moulins à vent. 402
Expériences sur des surfaces de diverses formes .... Ib.
Influence de l'inclinaison des ailettes 403
Influence du rapprochement des surfaces exposées à la résistance de l'air 404
Influence de la forme des surfaces .... Ib.
Résistance de l'air au mouvement des corps sphériques .... Ib.
Expériences de Metz sur les corps en mouvement dans l'air 405
Marche suivie pour tenir compte des effets de l'accélération 408
Vérification de l'exactitude de cette formule 410
Influence de l'étendue des surfaces 411

Pages.
Conséquence des résultats.................... 412
Expériences sur les parachutes.................... 413
Cas où le parachute présente sa convexité à l'air.................... 414
Cas où le mouvement du parachute est accéléré.................... Ib.
Résistance de l'air au mouvement des plans inclinés dans l'air.................... Ib.
Conclusions générales des expériences de Metz.................... 416
De l'effort exercé par le vent sur les surfaces immobiles opposées à sa direction.................... 417
Observation sur les vitesses du vent.................... 418
Des moyens à employer pour mesurer la vitesse de l'air.................... 419
Anémomètre de M. Combes.................... 420
Nouvel anémomètre.................... 422
Tare de ces instruments.................... 424
Extension de la tare à de grandes vitesses.................... 425
Expériences de M. Thibault sur l'effort exercé par le vent sur les surfaces immobiles exposées à son action, perpendiculairement à sa direction.................... 429
Accord de ces résultats avec ceux du professeur Rouse cités par Smeaton.................... Ib.
Influence de la courbure des surfaces.................... 430
Influence de l'inclinaison des surfaces par rapport au vent.................... Ib.
Difficultés que présente la direction des ballons.................... 431

FIN DE LA TABLE.

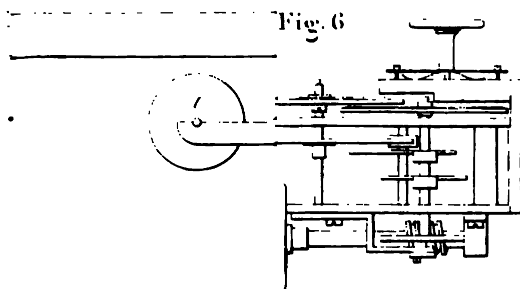
Ch. Lahure, imprimeur du Sénat et de la Cour de Cassation
(ancienne maison Crapelet), rue de Vaugirard, 9.

...e de papier.

Fig. 2. Compteur.

Élévation lévation longitudinale.

Fig. 6



Coupe ... (Échelle moitié.)

Fig. 4.

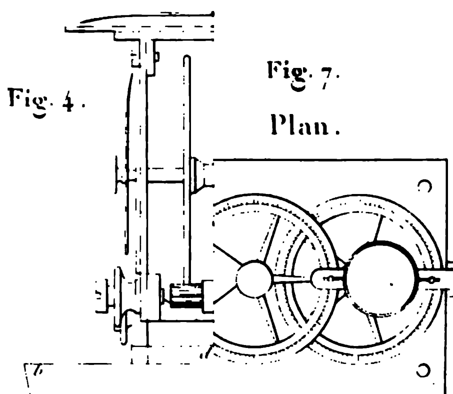
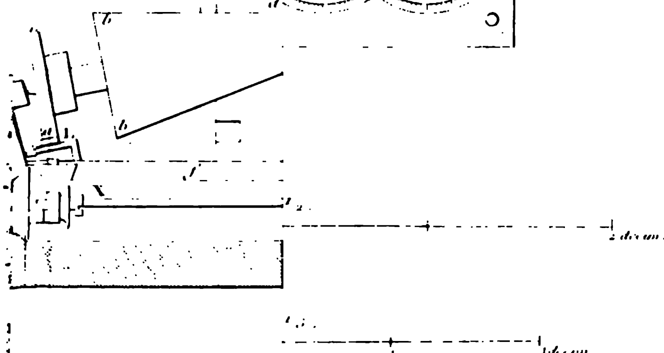


Fig. 7.

Plan.



2 décim.

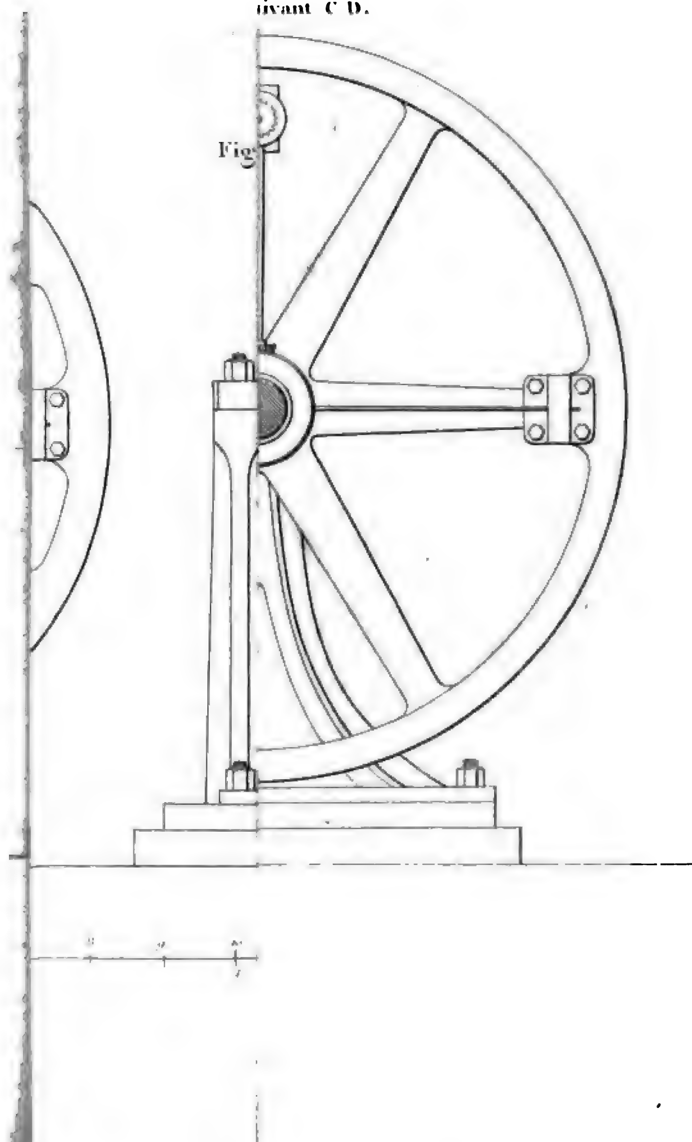
3 décim.



Pl. 2.

amomètres de

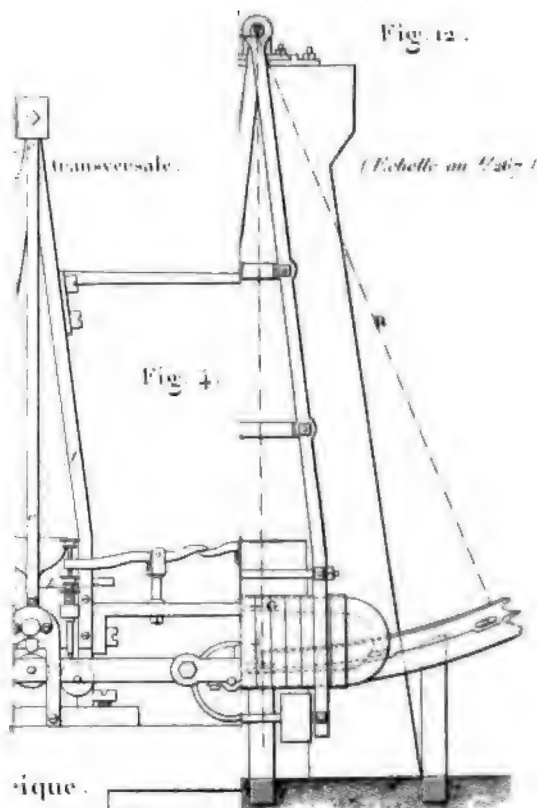
(Echelle au 1/10)



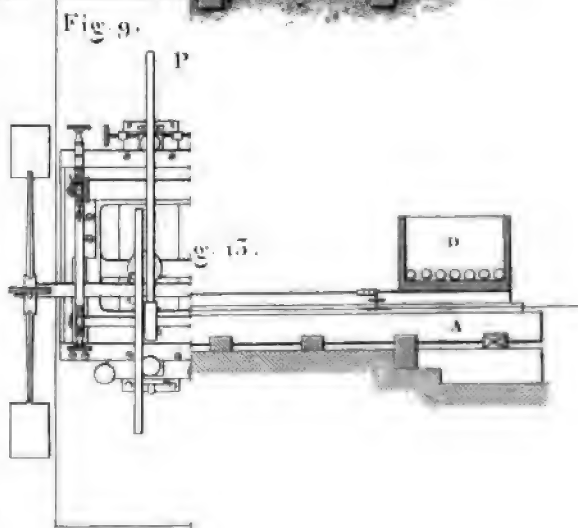


Pl. 3

balistique.



ique.





Notic

Pl. 4.

Fig. 5.

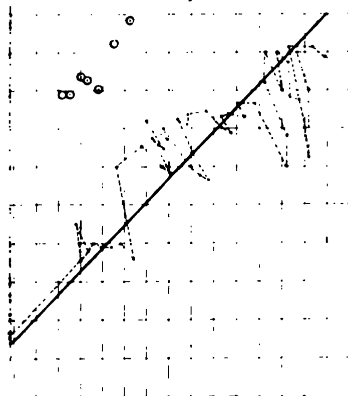
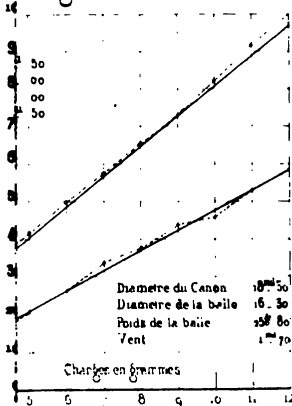


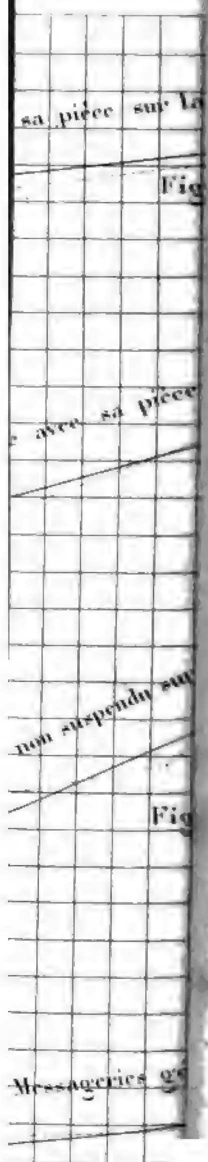
Fig. 1 et 2.



Librairie de L. HACHETTE et Cie à Paris



5


sa pièce sur la
Fig
avec sa pièce
non suspendu sur
Fig
Messageries gé
2m,00





